Niveau (*)

Ex 1 :

Nombres réels:	$-\pi$	-3π	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	6π
Points images:	I'	I'	J'	J	I

Nombres réels:	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	4π
Points images:	N	M	L	I

Nombres réels:	$\frac{\pi}{3}+2\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}+\pi$	$\frac{13\pi}{3}$
Points images:	N	E	D	N

Ex 2 :

1^{re} ligne:	3π	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	22π	$-\frac{7\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{3}$	$\frac{41\pi}{6}$
2^e ligne:	π	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{21\pi}{2}$	2π	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$

Ex 3 :

Indiquons, en justifiant votre réponse, si les deux réels de chaque cou
ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.

1. $\frac{3\pi}{7}$ et $-\frac{25\pi}{7}$

On a: $-\frac{25\pi}{7} = \frac{-28\pi+3\pi}{7} = -4\pi + \frac{3\pi}{7} = -2\times 2\pi + \frac{3\pi}{7}$.

Ainsi les nombres réels $\frac{3\pi}{7}$ et $-\frac{25\pi}{7}$ sont associés au même point-ima
sur le cercle trigonométrique.

2. $-\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$

Les points $-\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$ ne sont pas associés au même point-image s
le cercle trigonométrique car ils sont symétrique l'un de l'autre p
rapport à l'axe des abscisses.

3. $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{22\pi}{3}$

On a: $\frac{22\pi}{3} = \frac{18\pi+4\pi}{3} = 6\pi + \frac{4\pi}{3} = 2\times 3\pi + \frac{4\pi}{3}$.

Ainsi les nombres réels $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{22\pi}{3}$ sont associés au même point-ima
sur le cercle trigonométrique.

4. $-\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{9\pi}{2}$

On a : $\frac{9\pi}{2} = \frac{12\pi-3\pi}{2} = 6\pi + \frac{3\pi}{2} = 2\times 3\pi + \frac{3\pi}{2}$.

Ainsi, les nombres réels $-\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{9\pi}{2}$ sont associés au même point-ima
sur le cercle trigonométrique.

Niveau (**)

Ex 4 :

- $X = \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned}
X &= \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{3}{2} + \frac{2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{5+\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

- $Y = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos(5\pi)$

$$\begin{aligned}
Y &= \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos(5\pi)\\
&= \sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right) + \cos(2\times 2\pi+\pi)\\
&= \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) + \cos(\pi)\\
&= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\\
&= 0
\end{aligned}$$

Ex 5 :

Calculons les expressions suivantes.

- $X = \cos\left(\frac{\pi}{6}-5\pi\right) - \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
X &= \cos\left(\frac{\pi}{6}-5\pi\right) - \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \cos\left[-\left(5\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right] - \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X &= \cos\left(4\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\\
&= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&= -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}+1\\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

D'où $X = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

- $Y = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-\pi\right) + \cos\left(8\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned}
Y &= \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-\pi\right) + \cos\left(8\pi-\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right] - \sin\left[-\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right] + \cos\left(2\times 4\pi-\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

D'où $Y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Ex 6 :

On donne : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

1. Déterminons la valeur exacte de $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

On sait que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$, donc;

$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1.$
Ainsi on a:

$$\begin{aligned}
\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) &= 1-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\\
&= 1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2\\
&= 1-\frac{5+2\sqrt{5}+1}{16}\\
&= 1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}\\
&= 1-\frac{3+\sqrt{5}}{8}\\
&= \frac{8-3-\sqrt{5}}{8}\\
&= \frac{5-\sqrt{5}}{8}
\end{aligned}$$

D'où $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$

2. Déduisons la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

De ce qui précède on a: $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\pm\sqrt{\frac{5-}{8}}$

$\frac{\pi}{5}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)>0.$

D'où $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$

Ex 7 :

- $X=\cos(0)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned}
X &= \cos(0)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{3\pi+\pi}{3}\right)\\
&= \frac{2+1}{2}+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\\
&= \frac{3}{2}-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&= \frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\
&= \frac{3-1-1}{2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

D'où $X=\frac{1}{2}$

- $Y=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$

$$\begin{aligned}
Y &= \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi-\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{7\pi+\pi}{7}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où $Y=0$

Ex 8 :

Résolvons l'équation $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}
\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \cos(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

1. lorsque x appartient à l'intervalle $[0;\pi]$;

On a :

- $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \in [0;\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \in [0;\pi] &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi \\
&\Leftrightarrow 0 \leq \frac{5}{6} + 2k \leq 1 \\
&\Leftrightarrow -\frac{5}{6} \leq 2k \leq 1 - \frac{5}{6} \\
&\Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{1}{12} \\
&\Leftrightarrow -0,417 \leq k \leq 0,083 \\
&\Leftrightarrow k = 0
\end{aligned}$$

$k = 0$ alors on a $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2 \times 0 \times \pi = \dfrac{5\pi}{6}$ d'où $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

- $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \in [0;\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \in [0;\pi] &\Leftrightarrow 0 \leq -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi \\
&\Leftrightarrow 0 \leq -\frac{5}{6} + 2k \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{5}{6} \leq 2k \leq 1 + \frac{5}{6} \\
&\Leftrightarrow \frac{5}{12} \leq k \leq \frac{11}{12} \\
&\Leftrightarrow 0,417 \leq k \leq 0,917
\end{aligned}$$

D'où l'entier k n'existe donc pas.

Ainsi, $x = \dfrac{5\pi}{6}$ est une solution unique de l'équation sur l'intervalle $[0;\pi]$

2. lorsque x appartient à l'intervalle $\left]-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

On a :

- $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \in \left]-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \in \left]-\pi;\frac{\pi}{2}\right] &\Leftrightarrow -\pi < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow -1 < \frac{5}{6} + 2k \leq 1 \\
&\Leftrightarrow -1 - \frac{5}{6} < 2k \leq \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \\
&\Leftrightarrow -\frac{11}{6} < 2k \leq -\frac{2}{6} \\
&\Leftrightarrow -\frac{11}{12} < k \leq -\frac{1}{6} \\
&\Leftrightarrow -0,917 < k \leq -0,167
\end{aligned}$$

D'où l'entier k n'existe donc pas.

- $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \in \left]-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \in \left]-\pi; \frac{\pi}{2}\right] &\Leftrightarrow -\pi < -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow -1 < -\frac{5}{6} + 2k \leq \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow -1 + \frac{5}{6} < 2k \leq \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{6} < 2k \leq \frac{8}{6} \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{12} < k \leq \frac{8}{12} \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{12} < k \leq \frac{2}{3} \\
&\Leftrightarrow -0,083 < k \leq 0,667 \\
&\Leftrightarrow k = 0
\end{aligned}$$

$k = 0$ alors on a $x = -\frac{5\pi}{6} + 2 \times 0 \times \pi = -\frac{5\pi}{6}$.

D'où $x = -\frac{5\pi}{6}$

Ainsi, $x = -\frac{5\pi}{6}$ est une solution unique de l'équation sur l'intervalle $\left]-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ex 9 :

1. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ et $x \in [0; \pi]$.
En s'aidant du cercle trigonométrique ci-dessus, on remarque que:
$\cos(x) = -\frac{1}{2}$ lorsque $x = \frac{2\pi}{3}$ et lorsque $x = -\frac{2\pi}{3}$.
x étant dans l'intervalle $[0; \pi]$, alors la valeur de x qui convient est $x = \frac{2\pi}{3}$.
D'où $\frac{2\pi}{3}$ est l'unique solution de l'équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ lorsque $x \in [0; \pi]$.

2. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
A partir du cercle trigonométrique ci-dessus, on remarque que:
$\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lorsque $x = -\frac{3\pi}{4}$ et lorsque $x = -\frac{\pi}{4}$.
x étant dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, alors la valeur de x qui convient est $x = -\frac{\pi}{4}$. D'où $-\frac{\pi}{4}$ est l'unique solution de l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lorsque $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
A partir du cercle trigonométrique ci-dessus, on remarque que:
$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ lorsque $x = -\frac{\pi}{6}$ et lorsque $x = \frac{\pi}{6}$.
x étant dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, alors les deux valeurs $x = -\frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{6}$ conviennent.
D'où $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ sont les solutions de l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ lorsque $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

4. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.
A partir du cercle trigonométrique ci-dessus, on remarque que:
$\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lorsque $x = -\frac{3\pi}{4}$ et lorsque $x = -\frac{\pi}{4}$.
x étant dans l'intervalle $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$, alors la valeur de x qui convient est $x = -\frac{3\pi}{4}$.
D'où $-\frac{3\pi}{4}$ est l'unique solution de l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lorsque $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

5. $\cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $x \in [-\pi;\pi]$.

$\cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

A partir du cercle trigonométrique ci-dessus, on remarque que:

$\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ lorsque $x = -\dfrac{\pi}{4}$ et lorsque $x = \dfrac{\pi}{4}$.

x étant dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$, alors les deux valeurs $x = -\dfrac{\pi}{4}$ et $x = \dfrac{\pi}{4}$ conviennent.

D'où $-\dfrac{\pi}{4}$ et $x = \dfrac{\pi}{4}$ sont les solutions de l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ lorsque $x \in [-\pi;\pi]$.

6. $\cos(x) = -1$ et $x \in [-\pi;\pi]$.

A partir du cercle trigonométrique ci-dessus, on remarque que:

$\cos(x) = -1$ lorsque $x = -\pi$ et lorsque $x = \pi$.

x étant dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$, alors les deux valeurs $x = -\pi$ et $x = \pi$ conviennent.

D'où $-\pi$ et π sont les solutions de l'équation $\cos(x) = -1$ lorsque $x \in [-\pi;\pi]$