1ère B **SOS Maths – Exponentielles - *Correction*** **Avril 2022**

Ex 1 : Pour chaque fonction suivante dresser le tableau de signes

$f(x)=(3x-2)e^{x}$

x	$-\infty$		$2/3$		$+\infty$
$3x-2$		$-$	0	$+$	
e^{x}		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$g(x)=(x^2-4x+3)e^{-x}$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$h(x)=\dfrac{e^{x}+2}{e^{x}-1}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{x}+2$		$+$		$+$	
$e^{x}-1$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	

$k(x)=-e^{1-x^2}$

x	$-\infty$		$+\infty$
-1		$-$	
e^{1-x^2}		$+$	
$f(x)$		$-$	

Ex 2 : Pour chaque fonction suivante calculer la dérivée

$f(x)=-e^{x^2-2x}$ donc $f'(x)=-(2x-2)e^{x^2-2x}=(-2x+2)e^{x^2-2x}$

$g(x)=(-3x+4)e^{x}$ donc $g'(x)=-3e^{x}+(-3x+4)e^{x}=(-3x+1)e^{x}$

$h(x)=(2x^2-1)e^{-x}$ donc $h'(x)=(4x)e^{-x}-(2x^2-1)e^{-x}=(-2x^2+4x+1)e^{-x}$

$k(x)=\dfrac{e^{-x}}{x-1}$ donc $k'(x)=\dfrac{-e^{-x}(x-1)-e^{-x}}{(x-1)^2}=\dfrac{e^{x}(-x)}{(x-1)^2}$

Ex 3 : Pour chaque fonction suivante étudier globalement les variations

$f(x)=(-2x+5)e^{x}$; $f'(x)=(3-2x)e^{x}$

x	$-\infty$		$1{,}5$		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	
f	0	↗	9	↘	$-\infty$

$g(x)=(x^2-4)e^{x}$; $g'(x)=(x^2+2x-4)e^{x}$; $x_1=1-\sqrt{5}$; $x_2=1+\sqrt{5}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	↗	$0{,}25$	↘	$-8{,}5$	↗	$+\infty$

$h(x)=(3x+1)e^{-x+2}$; $h'(x)=(2-3x)e^{2-x}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$11{,}4$	↘	0

Ex 4 : Résoudre les équations exponentielles suivantes

(E_1) : $e^{x^2-1}=e^{2x}$ donc $x^2-1=2x$ donc $x^2-2x-1=0$
donc $S=\{1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\}$

(E_2) : $e^{2x^2+x+1}=1$ donc $2x^2+x+1=0$ donc $S=\varnothing$

(E_3) : $\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+2}=-1$ donc $e^{x}-1=-e^{x}-2$ donc $2e^{x}=-1$ donc $S=\varnothing$

(E_4) : $\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+2}=e^{x}$ donc $e^{x}-1=e^{x}(e^{x}+2)$ donc $e^{2x}+e^{x}+1=0$
or $X^2+X+1=0$ donne $\Delta<0$ donc $S=\varnothing$

Ex 5 : Résoudre les inéquations exponentielles suivantes

(E₁) : $e^{x^2-1} > e^{2x}$ donc $x^2-1>2x$ donc $x^2-2x-1>0$

donc $S=]-\infty;1-\sqrt{2}]\cup[1+\sqrt{2};+\infty[$

(E₂) : $e^{2x^2+x+1}\leqslant 1$ donc $2x^2+x+1\leqslant 0$ or $\Delta<0$ donc $S=\varnothing$

(E₃) : $\dfrac{e^x-1}{e^x+2}\geqslant -1$ donc $e^x-1\geqslant -e^x-2$ donc $2e^x>-1$ donc $S=\mathbb{R}$

(E₄) : $\dfrac{e^x-1}{e^x+2}>e^x$ donc $e^x-1>e^{2x}+2e^x$ donc $e^{2x}+e^x+1<0$

or $\Delta<0$ donc $S=\varnothing$

Ex 6 : On donne les fonctions $f(x)=xe^{-x}$ et $g(x)=x^2e^{-x}$ avec $x\geqslant 0$

1) Étudier les variations des fonctions f et g sur l'intervalle $[0;+\infty[$

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$

$f'(x)=0$ donne $1-x=0$ (car $e^{-x}\neq 0$) donc $x=1$

$f'(x)>0$ donne $1-x>0$ (car $e^{-x}>0$) donc $x<1$

on en déduit le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
signe de f'		+	0	−	
f	0	↗	0,37	↘	0

De même $g'(x)=2xe^{-x}+x^2(-e^{-x})=e^{-x}(-x^2+2x)$

$g'(x)=0$ donne $-x^2+2x=0$ (car $e^{-x}\neq 0$) donc $x=0$ ou $x=2$

g'(x)>0 donne $-x^2+2x>0$ (car $e^{-x}>0$) donc $0<x<2$

on en déduit le tableau de variations de g :

x	0		2		$+\infty$
signe de f'		+	0	−	
f	0	↗	0,54	↘	0

2) Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$

on obtient $xe^{-x}=x^2e^{-x}$ donc $e^{-x}(x-x^2)=0$ donc $x-x^2=0$

(car $e^{-x}\neq 0$) donc $x=0$ ou $x=1$

3) Résoudre l'inéquation $f(x)\geqslant g(x)$

on obtient $xe^{-x}\geqslant x^2e^{-x}$ donc $e^{-x}(x-x^2)\geqslant 0$ donc $x-x^2\geqslant 0$

(car $e^{-x}>0$) donc $x\in[0;1]$

4) En déduire la position relative des courbes C_f et C_g

- Si $x\in[0;1]$ alors C_f est au-dessus de C_g
- Si $x=1$ alors C_f coupe C_g au point $A\left(1;\dfrac{1}{e}\right)$
- Si $x\in[1;+\infty[$ alors C_g est au-dessus de C_f

5) vers la « *Tale spé* » : Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par C_f et C_g sur l'intervalle $[0;1]$

$$Aire=\int_0^1 (f(x)-g(x)).dx=\int_0^1 (x-x^2)e^{-x}.dx\simeq 0{,}104\,ua$$