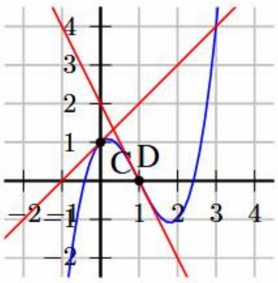
Exercice 1. Lecture graphique puis calculs — 2 points



1. Lecture du nombre dérivé : $g'(0) = 1$.
2. Équation de T_0 : $T_0 \;:\; y = x + 1$.
3. Lecture du nombre dérivé : $g'(1) = -2$.
4. Équation de T_1 : $T_1 \;:\; y = -2x + 2$.

Exercice 3. Taux d'accroissement et nombre dérivé — 3 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

1. **[2 points]** Pour tout réels a et h on a :

$$t_f(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$t_f(h) = \frac{(a+h)^2 - 3(a+h) + 1 - \left(a^2 - 3a + 1\right)}{h}$$

$$t_f(h) = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 3a - 3h + 1 - a^2 + 3a - 1}{h}$$

$$t_f(h) = \frac{2ah + h^2 - 3h}{h}$$

$$\boxed{t_f(h) = 2a + h - 3}$$

2. **[1 point]** En déduire le nombre dérivé de f en a.

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \; t(h) = \lim_{h \to 0} \; \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a - 3}$$

Exercice 4. Une histoire de tangentes — 4.5 points

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 1$.

1. **[1 point]** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions qui le sont. Pour tout réel x on a :

$$\boxed{g'(x) = 6x^2 - 24x + 18}$$

2. **[2 points]** L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $A\,(2\;;\;g(2))$ est : $T_2 \;:\; y = g'(2)(x-2) + g(2)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} g(2) & = 5 \\ g'(2) & = -6 \end{array} \right. \Bigg| \Rightarrow T_2 \;:\; y = -6(x-2) + 5 \;\text{ soit }\; \boxed{T_2 \;:\; y = -6x + 17}$$

3. **[1.5 points]** On cherche donc les abscisses des points $A\,(x_0\;;\;g(x_0))$ de $\mathscr{C}_g$ qui admettent une tangente de coefficient directeur nul et donc tels que $g'(x_0) = 0$. Cela revient donc à résoudre l'équation $g'(x) = 0$.

$$g'(x) = 2 \iff 6x^2 - 24x + 18 = 0$$

C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} a & = 6 \\ b & = -24 \\ c & = 18 \end{array} \right. \Bigg| \Rightarrow \Delta = 144 > 0$$

Le discriminant étant positif, l'équation admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{24 - \sqrt{144}}{12} = 1 \;\text{ et }\; x_1 = \frac{24 + \sqrt{144}}{12} = 3$$

Ce sont les abscisses les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ qui admettent une tangente de coefficient directeur nul soit :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{1\;;\;3\}}$$

Exercice 5. 3.5 points

On considère la fonction h définie sur $]-\infty\,;\,0]$ par $h(x)=\dfrac{2-x}{1-3x}$.

1. [2 points] Déterminer la fonction dérivée de h sur $]-\infty\,;\,0]$.

La fonction h est définie et dérivable sur $]-\infty\,;\,0]$ comme somme et composée de fonctions qui le sont.

La fonction h est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

$u(x)=2-x$	$u'(x)=-1$
$v(x)=1-3x$	$v'(x)=-3$

Donc pour tout x de $]-\infty\,;\,0]$:

$$h'(x)=\frac{-1\times(1-3x)-(2-x)\times(-3)}{(1-3x)^2}$$
$$h'(x)=\frac{-1+3x-(-6+3x)}{(1-3x)^2}$$
$$h'(x)=\frac{-1+3x+6-3x}{(1-3x)^2}$$
$$\boxed{h'(x)=\frac{5}{(1-3x)^2}}$$

2. [1.5 points] Déterminer l'équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 0. $T_0\ :\ y=h'(0)(x-0)+h(0)$

$$\left\{\begin{array}{ll} h(0) & =2 \\ h'(0) & =5 \end{array}\right. \Bigg|\ \Rightarrow T_2\ :\ y=5(x-0)+2 \text{ soit } \boxed{T_0\ :\ y=5x+2}$$

Exercice 6. 3 points

1. [1.5 point] On considère la fonction j définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x)=\dfrac{1}{1+2x^2}$.

Déterminer la fonction dérivée de j sur $\mathbb{R}$.

La fonction j est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions qui le sont.

La fonction j est de la forme $\dfrac{1}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{-v'}{v^2}$ avec :

$v(x)=1+2x^2$	$v'(x)=4x$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\boxed{j'(x)=\frac{-4x}{(1+3x^2)^2}}$$

2. [1.5 point] On considère la fonction k définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $k(x)=2x\sqrt{x}$.

Déterminer la fonction dérivée de k sur $[1\,;\,+\infty[$.

La fonction k est définie et dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont.

La fonction k est de la forme uv donc de dérivée $u'v+uv'$ avec :

$u(x)=2x$	$u'(x)=2$
$v(x)=\sqrt{x}$	$v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc pour tout x de $[1\,;\,+\infty[$:

$$k'(x)=2\times\sqrt{x}+2x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$k'(x)=2\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{x}}$$
$$k'(x)=2\sqrt{x}+\frac{x\times\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}$$
$$k'(x)=2\sqrt{x}+\frac{x\times\sqrt{x}}{x}$$
$$k'(x)=2\sqrt{x}+\sqrt{x}$$
$$\boxed{k'(x)=3\sqrt{x}}$$