Probabilités conditionnelles

Exercice 1 :

Soient deux évènements A et B tels que
$P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cup B) = 0,6$.

1. Calculons $P(A \cap B)$ et $P(\bar{A} \cap B)$.

- $P(A \cap B)$.
  On sait que pour tout évènement A et B,
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ donc
  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.
  Ainsi, $P(A \cap B) = 0,4 + 0,3 - 0,6 = 0,7 - 0,6 = 0,1$.
  D'où $P(A \cap B) = 0,1$
- $P(\bar{A} \cap B)$.
  On sait que $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.
  Donc $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.
  Ainsi $P(\bar{A} \cap B) = 0,3 - 0,1 = 0,2$
  D'où $P(\bar{A} \cap B) = 0,2$

2. Déduisons les valeurs de $P_B(A)$, $P_A(B)$, $P_B(\bar{A})$ et $P_{\bar{A}}(B)$.

- $P_B(A)$.
  $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,1}{0,3} = \dfrac{1}{3}$.
  D'où $P_B(A) = \dfrac{1}{3}$.
- $P_A(B)$.
  $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,1}{0,4} = 0,25$.
  D'où $P_A(B) = 0,25$.
- $P_B(\bar{A})$.
  $P_B(\bar{A}) = \dfrac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,2}{0,3} = \dfrac{2}{3}$.
  D'où $P_B(\bar{A}) = \dfrac{2}{3}$.
- $P_{\bar{A}}(B)$.
  $P_{\bar{A}}(B) = \dfrac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})}$.
  Calculons $P(\bar{A})$.
  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$.
  Ainsi, $P_{\bar{A}}(B) = \dfrac{0,2}{0,6} = \dfrac{1}{3}$.
  D'où $P_{\bar{A}}(B) = \dfrac{1}{3}$

Exercice 2 :

1. Recopions et complétons le tableau, sachant que $P(A) = 0,62$, $P(B) = 0,34$ et $P_A(B) = 0,3$.
Calculons les probabilités:

- $P(A \cap B)$.
  On sait $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ donc $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
  Ainsi, $P(A \cap B) = 0,62 \times 0,3 = 0,186$.
  D'où $P(A \cap B) = 0,186$
- $P(\bar{A} \cap B)$.
  On sait que $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ donc
  $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.
  Ainsi, $P(\bar{A} \cap B) = 0,34 - 0,186 = 0,154$.
  D'où $P(\bar{A} \cap B) = 0,154$

- $P(\bar{B} \cap A)$.
  On sait que $P(A) = P(B \cap A) + P(\bar{B} \cap A)$ donc
  $P(\bar{B} \cap A) = P(A) - P(B \cap A)$ or $P(B \cap A) = P(A \cap B)$.
  Ainsi, $P(\bar{B} \cap A) = 0,62 - 0,186 = 0,434$.
  D'où $P(\bar{B} \cap A) = 0,434$.
- $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.
  $P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$ donc
  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B})$.
  Ainsi, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,66 - 0,434 = 0,226$.
  D'où $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,226$

Par suite de ce qui précède on obtient le tableau suivant:

	A	$\bar{A}$	Total
B	0,186	0,154	0,34
$\bar{B}$	0,434	0,226	0,66
Total	0,62	0,38	1

2. Calculons $P_B(A)$ et $P_B(\bar{A})$.

- $P_B(A)$.
  $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,186}{0,34} = 0,547.$
  D'où $P_B(A) = 0,547$.
- $P_B(\bar{A})$.
  $P_B(\bar{A}) = \dfrac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,154}{0,34} = 0,453.$
  D'où $P_B(\bar{A}) = 0,453$

Exercice 4 :

On considère A et B deux évènements d'une même expérience aléatoire.

1. Calculons $P(A \cap B)$ lorsque $P(A) = 0,8$ et $P_A(B) = 0,6$.
$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.
Ainsi, $P(A \cap B) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$.
D'où $P(A \cap B) = 0,48$.

2. On donne: $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,7$ et $P(A \cup B) = 0,9$.

a. Calculons $P(A \cap B)$.
On sait que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ donc
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.
Ainsi, $P(A \cap B) = 0,3 + 0,7 - 0,9 = 1 - 0,9 = 0,1$.
D'où $P(A \cap B) = 0,1$.

b. Calculer $P_B(A)$.
$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,1}{0,7} = \dfrac{1}{7}.$
D'où $P_B(A) = \dfrac{1}{7}$

c. Calculer $P_A(B)$.
$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,1}{0,3} = \dfrac{1}{3}.$
$P_A(B) = \dfrac{1}{3}$

ARBRES PONDÉRÉS ET PROBABILITÉS TOTALES

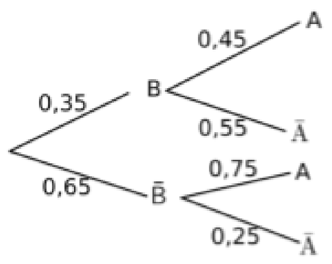
Exercice 1 :

En considérant l'arbre pondérés de l'expérience aléatoire,

- Prouvons que $P(D) = 0,405$.
  D'après la formule des probabilités totales on a:
  $P(D) = P(C \cap D) + P(B \cap D) + P(A \cap D)$.
  Or $P(C \cap D) = 0,25 \times 0,6 = 0,15$
  $P(B \cap D) = 0,35 \times 0,5 = 0,175$
  $P(A \cap D) = 0,4 \times 0,2 = 0,08$.
  Ainsi, $P(D) = 0,15 + 0,175 + 0,08 = 0,405$

Exercice 4 :

1. Complétons l'arbre de probabilité.



2. Déterminons les probabilités de $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$.

- $P(A \cap B) = 0,35 \times 0,45 = 0,1575$ d'où $P(A \cap B) = 0,1575$
- $P(A \cap \bar{B}) = 0,65 \times 0,75 = 0,4875$ d'où $P(A \cap \bar{B}) = 0,4875$

3. Déduisons la probabilité de l'évènement A.
$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = 0,1575 + 0,4875 = 0,645.$
D'où $P(A) = 0,645$

4. Déterminons la probabilité de l'évènement B, sachant que l'évènement A est réalisé.

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

$P(A \cap B) = 0,1575$ et $P(A) = 0,645$.

Donc $P_A(B) = \dfrac{0,1575}{0,645} = 0,2442$.

D'où $P_A(B) = 0,2442$.

Exercice 5 :

1. Traduisons par une phrase l'évènement $H \cap C$ et calculons sa probabilité.

$H \cap C$ « le professeur est un homme et travaille à temps plein ».

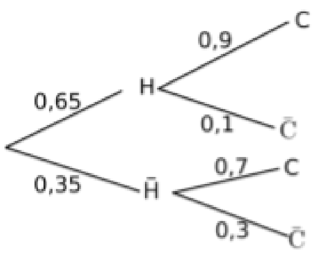
On sait que 65% des professeurs sont des hommes donc $P(H) = 0,65$, de plus 90% de ces hommes professeurs travaillent à temps plein. Donc la probabilité que le professeur travaille à temps plein, sachant que c'est un homme est $P_H(C) = 0,9$.

$P_H(C) = \dfrac{P(H \cap C)}{P(H)}$ donc $P(H \cap C) = P_H(C) \times P(H)$.

Ainsi $P(H \cap C) = 0,9 \times 0,65 = 0,585$.

D'où $P(H \cap C) = 0,585$

2. Réalisons un arbre pondéré illustrant la situation.



3. Justifions que $P(C)$ est égale à $0,83$.

D'après la formule des probabilité totale,

$P(C) = P(C \cap H) + P(C \cap \bar{H})$.

$P(C \cap H) = 0,585$

D'après l'arbre pondéré on a $P(C \cap \bar{H}) = 0,7 \times 0,35 = 0,245$.

Ainsi, $P(C) = 0,585 + 0,245 = 0,83$.

D'où $P(C) = 0,83$

4. Calculons $P_C(\bar{H})$.

$P_C(\bar{H}) = \dfrac{P(C \cap \bar{H})}{P(C)}$.

$P(C \cap \bar{H}) = 0,245$ et $P(C) = 0,83$.

Ainsi, $P_C(\bar{H}) = \dfrac{0,245}{0,83} = 0,295$.

D'où $P_C(\bar{H}) = 0,295$.

5. Il s'agit ici de calculer la probabilité que le professeur choisit soit un homme sachant qu'il travaille à temps partiel c'est-à-dire $P_{\bar{C}}(H)$.

$P_{\bar{C}}(H) = \dfrac{P(H \cap \bar{C})}{P(\bar{C})}$.

D'après l'arbre pondéré on a: $P(H \cap \bar{C}) = 0,65 \times 0,1 = 0,065$ et $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,83 = 0,17$.

Ainsi, $P_{\bar{C}}(H) = \dfrac{0,065}{0,17} = 0,382$.

D'où $P_{\bar{C}}(H) = 0,382$

Evènements indépendants

Exercice 2 :

Répondons par Vrai ou faux en justifiant notre réponse.

On considère deux évènements E et B d'un univers Ω tels que:

$P(E) = 0,45$, $P_E(F) = 0,4$ et $P_F(E) = 0,45$.

1. Vrai.

Les évènements E et F sont indépendants car $P_F(E) = P(E) = 0,45$.

2. Faux.

On sait que $P_E(F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(E)}$ donc

$P(E \cap F) = P(E) \times P_E(F) = 0,45 \times 0,4 = 0,18$.

$P(E \cap F) = 0,18 \neq 0,25$ d'où l'affirmation est bien fausse.

3. Vrai.

D'après la question 1) les évènements E et F sont indépendants donc $P_E(F) = P(F) = 0,4$.

D'où l'affirmation est bien vraie.

Exercice 9 :
Soient deux événements A et B tels que $P(A) = p$, $P(B) = P(\bar{A})$ et $P(A \cap B) = 0,2p + 0,15$.

1. Prouvons que, pour tout $p \in \mathbb{R}$; $-p^2+0,8p-0,15 = (0,5-p)(p-0,3)$.

$$\begin{aligned}(0,5-p)(p-0,3) &= 0,5p - 0,5 \times 0,3 - p^2 + 0,3p \\ &= -p^2 + 0,8p - 0,15\end{aligned}$$

D'où on a bien $-p^2 + 0,8p - 0,15 = (0,5-p)(p-0,3)$.

2. Déterminons la probabilité p pour que les évènements A et B soient indépendants.
Si les évènements A et B sont indépendants alors on a
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
$P(A) = p$, $P(B) = P(\bar{A}) = 1 - p$ et $P(A \cap B) = 0,2p + 0,15$.

$$\begin{aligned}P(A \cap B) = P(A) \times P(B) &\Leftrightarrow \\ 0,2p + 0,15 = p(1-p) &\Leftrightarrow \\ p - p^2 - 0,2p - 0,15 = 0 &\Leftrightarrow \\ -p^2+0,8p - 0,15 = 0\end{aligned}$$

Résolvons l'équation $-p^2 + 0,8p - 0,15 = 0$.
De la question précédente, on a: $-p^2+0,8p-0,15 = (0,5-p)(p-0,3)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}-p^2 + 0,8p - 0,15 = 0 &\Leftrightarrow (0,5-p)(p-0,3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 0,5 - p = 0 \text{ ou } p - 0,3 = 0 \\ &\Leftrightarrow p = 0,5 \text{ ou } p = 0,3\end{aligned}$$

Par conséquent, les évènements A et B sont indépendants lorsque la probabilité $p = 0,3$ ou lorsque $p = 0,5$.

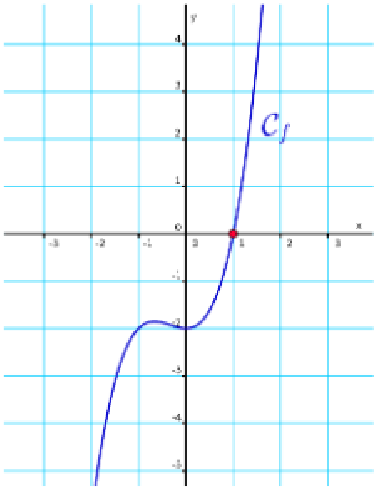
Études de Fonctions

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2.$$

1. **a.** Traçons la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.



b. Donnons le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
On a: $f(1) = 0$.
Pour tout $x \in]-\infty, 1[$ la courbe représentative de f est en dessous de l'axe des abscisses donc $f(x) < 0$.
Et pour tout $x \in]1, +\infty[$ la courbe représentative de f est au dessus de l'axe des abscisses donc $f(x) > 0$.

2. Déterminons la fonction dérivée f' de f et dressons le tableau de variation de la fonction f.

La fonction f est une fonction polynôme donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

Dressons le tableau de variation de f.

Posons $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(3x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Dressons en même temps le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f:

Calculons les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 + x^2 - 2) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 + x^2 - 2) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
- $f(0) = 0^3 + 0^2 - 2 = -2$
- $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2 = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} - 2$

  $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-8+12-54}{27} = -\frac{50}{27}$

On obtient donc le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		0		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\frac{50}{27}$	↗	$+\infty$

3. Déduisons le signe de la fonction f.

D'après le tableau de variation obtenu à la question précédente, on a:

- Pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $f(x) \in]-\infty, -2]$ c'est-à-dire $f(x) \leq -2$ donc $f(x) < 0$ pour tout $x \in]-\infty, 0]$.
- Pour tout $x \in \left[0, -\frac{2}{3}\right]$, $f(x) \in \left[-2, -\frac{50}{27}\right]$ c'est à dire $-2 \leq f(x) \leq -\frac{50}{27}$

Donc $f(x) < 0$ pour tout $x \in \left[0, -\frac{2}{3}\right]$

- Sur l'intervalle $\left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[$, $f(x) \in \left]-\frac{50}{27}, +\infty\right[$ donc il existe un réel $\alpha \left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Constate que $f(1) = 0$ et $1 \in \left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[$ donc $\alpha = 1$.

Par conséquent:

Pour tout $x \in \left]-\frac{2}{3}, 1\right[$ $f(x) < 0$

Pour tout $x \in]1, +\infty[$ $f(x) > 0$

En somme:

Pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $f(x) < 0$ et

Pour tout $x \in]1, +\infty[$ $f(x) > 0$

Exercice 1 :

On veut montrer que pour tout réel $x \in [0; +\infty[$, $3x^3 - 4x + 5 \geq 3$.
Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^3 - 4x + 5.$$

1. Déterminons $f'(x)$.

La fonction f est une fonction polynôme, donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 9x^2 - 4$

Dressons le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
Étudions le signe de $f'(x)$.
Posons $f'(x) = 0$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{4}{9} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ ou $x = -\dfrac{2}{3}$
Faisons en même temps le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f.
Calculons les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^3 - 4x + 5 = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^3 - 4x + 5 = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^3 = +\infty$

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		$\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{61}{9}$	$\searrow$	$\dfrac{29}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

- $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = 3\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3 - 4\left(-\dfrac{2}{3}\right) + 5 = -\dfrac{8}{9} + \dfrac{8}{3} + 5 = \dfrac{61}{9}$
- $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 - 4\left(\dfrac{2}{3}\right) + 5 = \dfrac{8}{9} - \dfrac{8}{3} + 5 = \dfrac{29}{9}$

2. Déduisons la valeur du minimum de f sur $[0; +\infty[$.

D'après le tableau de variation précédent, sur l'intervalle $\left]-\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$ la fonction admet un minimum en $\dfrac{2}{3}$ ayant pour valeur $\dfrac{29}{9}$.
On sait que $[0; +\infty[\subset \left]-\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$ car $-\dfrac{2}{3} < 0$ donc le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est $\dfrac{29}{9}$.

3. Conclusion:

Le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est $\dfrac{29}{9}$.
Donc pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) \geq \dfrac{29}{9}$ or $\dfrac{29}{9} > 3$.
On conclut donc que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) \geq 3$.
D'où pour tout $x \in [0; +\infty[$, $3x^3 - 4x + 5 \geq 3$.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + x - 2\sqrt{x}.$$

1. Déterminons $f'(x)$.

La fonction $x \mapsto x^2 + x$ est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]1, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant la fonction racine carrée alors elle est dérivable sur $]1, +\infty[$.

Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

Pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 1 - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 2x + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2. Étudions le signe de $f'(x)$.

$f'(x) = 2x + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} 1 < x &\Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{x}} < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < -\frac{1}{\sqrt{x}} < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} < 1 \\ &\Leftrightarrow 2x < 2x + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} < 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow 2x < f'(x) < 2x + 1 \end{aligned}$$

Or pour tout $x \in]1, +\infty[$, $2x > 0$.

Ainsi, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) > 0$

3. Dressons le tableau de variations de f.

Calculons d'abord les limites de f aux bornes de l'intervalle $]1, +\infty[$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + x - 2\sqrt{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
- $f(1) = 0$

x	1	$+\infty$
f	0	$\nearrow$ $+\infty$

4. Donnons les extremums de la fonction f sur $]1, +\infty[$.

La fonction f n'admet qu'un seul extremum sur $]1, +\infty[$.

C'est le minimum ayant pour valeur 0 qui est atteint en $x = 1$