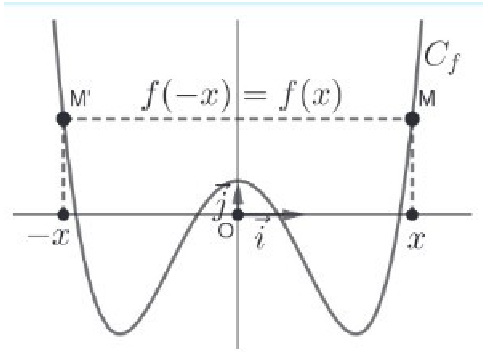
Fonctions Trigonométriques – 1ère STL

A) Les Propriétés graphiques

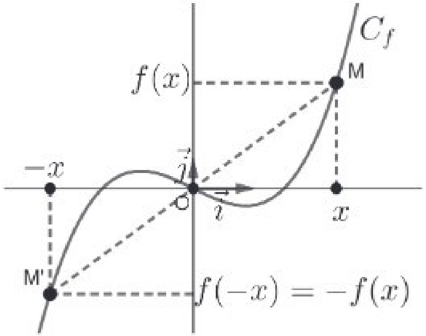
1) Parité d'une fonction

Définition : Soit f une fonction trigonométrique définie sur $[-\pi;\pi]$
f est paire si, et seulement si $f(-x)=f(x)$ pour tout $x\in[-\pi;\pi]$
C_f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Fonction paire

Définition : Soit f une fonction trigonométrique définie sur $[-\pi;\pi]$
f est impaire si, et seulement si $f(-x)=-f(x)$ pour tout $x\in[-\pi;\pi]$
C_f est alors symétrique par rapport à l'origine $O(0;0)$



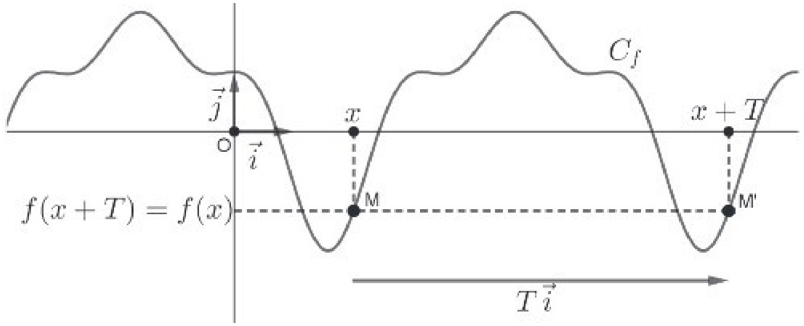
Fonction impaire

exemples :

- soit $f(x)=\cos(x)$ alors f est paire sur $[-\pi;\pi]$
- soit $f(x)=\sin(x)$ alors f est impaire sur $[-\pi;\pi]$

2) Périodicité d'une fonction

Définition : Soit f une fonction trigonométrique définie sur $[-\pi;\pi]$
f est périodique de période T (ou T - périodique) si, et seulement si
$f(x+T)=f(x)$ pour tout $x\in[-\pi;\pi]$
C_f est alors identique par translation de vecteur $T.\vec{i}$



Fonction T-périodique

exemples :

- soit $f(x)=\cos(x)$ alors f est $2\pi-périodique$ sur $[-\pi;\pi]$
- soit $f(x)=\sin(x)$ alors f est $2\pi-périodique$ sur $[-\pi;\pi]$

3) Le Domaine d'étude

Définition : On appelle domaine d'étude d'une fonction trigonométrique f l'intervalle D étant le plus petit intervalle sur lequel on peut étudier f

Méthode pratique :

- Si f est paire sur $[-\pi;\pi]$ alors $D=[0;\pi]$
- Si f est impaire sur $[-\pi;\pi]$ alors $D=[0;\pi]$
- Si f est $2\pi-périodique$ alors $D=[0;2\pi]$ ou $D=[-\pi;\pi]$
- Si f est $\pi-périodique$ alors $D=[0;\pi]$ ou $D=[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

exemples :

- soit $f(x)=\cos(x)$ alors $D=[0;\pi]$
- soit $f(x)=\sin(x)$ alors $D=[0;\pi]$
- soit $f(x)=\cos(2x)$ alors $D=[0;\frac{\pi}{2}]$
- soit $f(x)=\sin(4x)$ alors $D=[0;\frac{\pi}{4}]$
- soit $f(x)=\cos(\frac{x}{2})$ alors $D=[0;2\pi]$

B) La Dérivation trigonométrique

1) Dérivées de Cosinus

Définitions : Soit $x \in [-\pi ; \pi]$

- Soit $f(x)=\cos(x)$ alors $f'(x)=-\sin(x)$
- Soit $f(x)=\cos(2x)$ alors $f'(x)=-2\sin(2x)$
- Soit $f(x)=\cos(3x)$ alors $f'(x)=-3\sin(3x)$
- Soit $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ alors $f'(x)=-2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$
- Soit $f(x)=\cos(ax)$ alors $f'(x)=-a\sin(ax)$
- Soit $f(x)=\cos(ax+b)$ alors $f'(x)=-a\sin(ax+b)$

<u>exemples</u> : Calculer les dérivées trigonométriques suivantes

- $f(x)=2\cos(3x)$
- $f(x)=-2\cos(4x+\pi)$
- $f(x)=4\cos(x-\pi)+5\cos(2x+\frac{\pi}{4})$
- $f(x)=3\cos(-2x+\frac{\pi}{3})$

2) Dérivées de Sinus

Définitions : Soit $x \in [-\pi ; \pi]$

- Soit $f(x)=\sin(x)$ alors $f'(x)=\cos(x)$
- Soit $f(x)=\sin(2x)$ alors $f'(x)=2\cos(2x)$
- Soit $f(x)=\sin(3x)$ alors $f'(x)=3\cos(3x)$
- Soit $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ alors $f'(x)=2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$
- Soit $f(x)=\sin(ax)$ alors $f'(x)=a\cos(ax)$
- Soit $f(x)=\sin(ax+b)$ alors $f'(x)=a\cos(ax+b)$

<u>exemples</u> : Calculer les dérivées trigonométriques suivantes

- $f(x)=2\sin(3x)$
- $f(x)=-2\sin(4x+\pi)$
- $f(x)=4\sin(x-\pi)+5\sin(2x+\frac{\pi}{4})$
- $f(x)=3\sin(-2x+\frac{\pi}{3})$

<u>Rque :</u> de la même façon on pourra définir en Terminale STL la dérivée de la fonction « *tangente* » : si f $(x)=\tan(x)$ alors $f'(x)=1+\tan^2(x)$

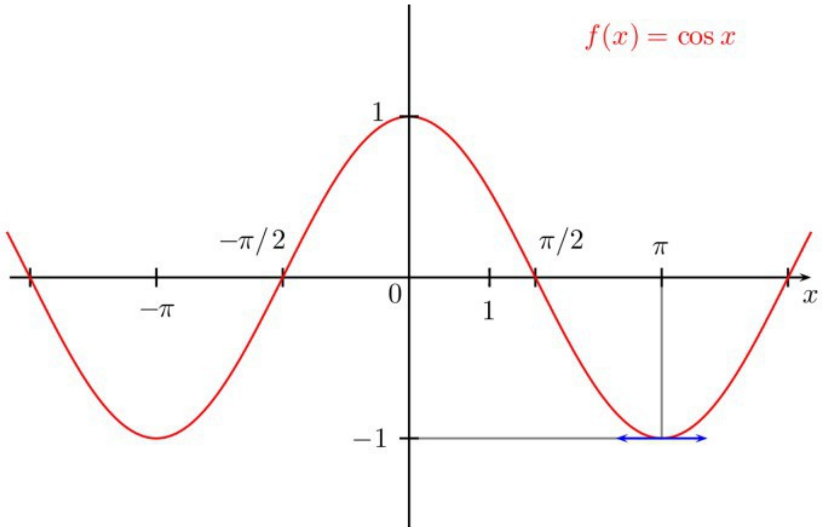
C) Études globales de fonctions trigonométriques

1) La fonction COS

Propriété : Soit la fonction « COSINUS » définie sur $[-\pi ; \pi]$ par $f(x)=\cos(x)$; le graphique est donné ci-dessous alors le tableau de variation est le suivant

FONCTION COSINUS

x	$-\pi$		0		π
$f'(x) = -\sin x$		$+$	0	$-$	0
$f(x) = \cos x$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1



<u>*Observations graphiques :*</u>

- f est paire sur $[-\pi ; \pi]$
- f est périodique avec $T=2\pi$
- f possède 2 racines sur $[-\pi ; \pi]$: $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$
- f est encadrée entre -1 et 1
- f admet 1 maximum local ($x=0$) et 2 minima locaux ($x=-\pi$; $x=\pi$)

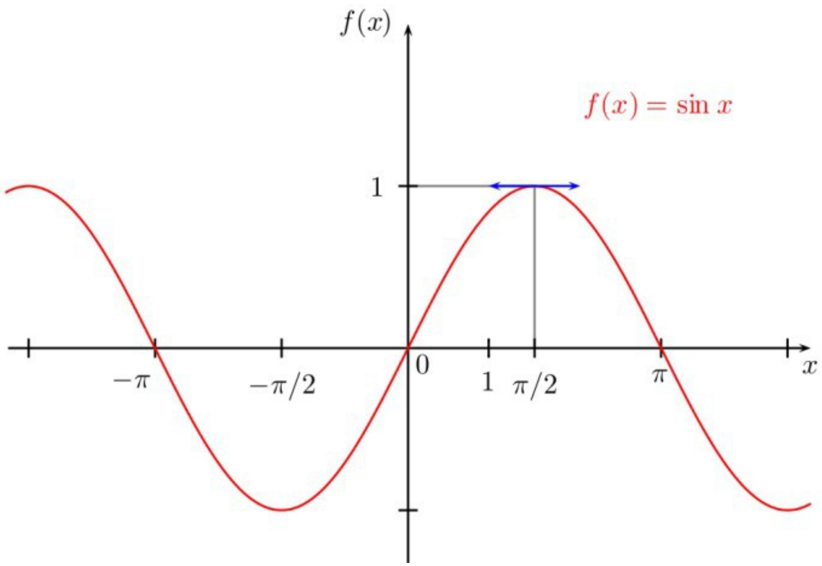
2) La fonctions SIN

Propriété : Soit la fonction « SINUS » définie sur $[-\pi\,;\pi]$ par $f(x)=\sin(x)$
le graphique est donné ci-dessous
alors le tableau de variation est le suivant

FONCTION SINUS

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)=\cos(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)=\sin(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

→ voir l'**animation de COS & SIN**



Observations graphiques :

- f est paire sur $[-\pi\,;\pi]$
- f est périodique avec $T=2\pi$
- f possède 2 racines sur $[-\pi\,;\pi]$: $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$
- f est encadrée entre -1 et 1
- f admet 1 minimum local ($x=-\pi/2$) et 1 maximum local ($x=\pi/2$)

D) Équations trigonométriques

1) Les équations avec COS

Propriété : Soit l'équation $(E):\cos(x)=\cos(a)$ alors il y a 2 solutions distinctes $x=a+2k\pi$ ou $x=-a+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

exemples : Résoudre les équations trigonométriques suivantes dans $\mathbb{R}$

$(E_1):\cos(x)=\cos(\frac{\pi}{3})$ $(E_2):\cos(x)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ $(E_3):\cos(2x)=\cos(\frac{\pi}{4})$

$(E_4):\cos(2x+\pi)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$ $(E_5):\cos(2x+\pi)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$

2) Les équations avec SIN

Propriété : Soit l'équation $(E'):\sin(x)=\sin(a)$ alors il y a 2 solutions distinctes $x=a+2k\pi$ ou $x=\pi-a+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

exemples : Résoudre les équations trigonométriques suivantes dans $\mathbb{R}$

$(E_1):\sin(x)=\sin(\frac{\pi}{3})$ $(E_2):\sin(x)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ $(E_3):\sin(2x)=\sin(\frac{\pi}{4})$

$(E_4):\sin(2x+\pi)=\sin(x-\frac{\pi}{3})$ $(E_5):\sin(2x+\pi)=\sin(x-\frac{\pi}{3})$

3) Les équations trigonométriques généralisées (vers la Tale STL)

Théorème : Soit l'équation $(E''):a\cos(x)+b\sin(x)=c$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$
alors il y a 2 cas distincts :

- si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}>1$ ou $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}<-1$ alors l'équation (E'') n'admet aucune solution
- si $-1\leqslant\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant1$ alors l'équation (E'') admet 2 solutions en posant $\cos(\alpha)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin(\alpha)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos(\beta)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$
car (E'') devient $co(x-\alpha)=\cos(\beta)$

exemples : Résoudre les équations trigonométriques suivantes dans $\mathbb{R}$

$(E_1):3\cos(x)+4\sin(x)=2$; $(E_2):5\cos(x)-12\sin(x)=8$