Cours

1 Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

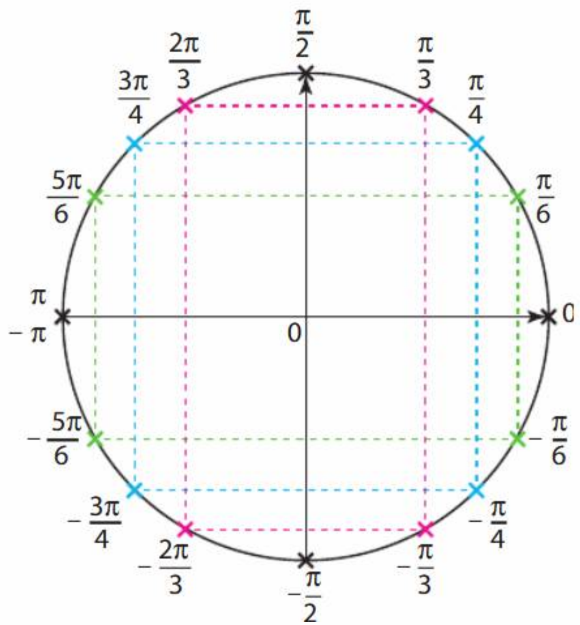
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, I est le point tel que $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et J le point tel que $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

Définition Le **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1, sur lequel on définit un sens positif de parcours : c'est le sens inverse des aiguilles d'une montre. On parle aussi de **sens direct**.

On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O (sa longueur est donc égale à 2π).
La droite (d), tangente à $\mathscr{C}$ en I, est munie du repère $\left(I\,;\vec{j}\right)$: on l'assimile à la droite des nombres réels.
Sur la droite des nombres réels, on place un point d'abscisse x.
Quand on enroule, sur le cercle $\mathscr{C}$, la demi-droite des nombres réels positifs dans le sens direct, et celle des nombres réels négatifs dans le sens indirect, chaque nombre réel x vient « s'appliquer » sur un unique point M du cercle $\mathscr{C}$.
On dit que le point M est **le point associé** au nombre réel x.
Mais x n'est pas le seul nombre réel étant associé au point M.
En effet, puisque la longueur du cercle $\mathscr{C}$ est égale à 2π, le point M est aussi le point associé aux nombres réels $x+2\pi$, $x-2\pi$… (représentés sur le graphique ci-contre).

Propriétés Soit M un point du cercle trigonométrique associé à un nombre réel x.
- M est le point associé à tous les nombres réels de la forme $\boldsymbol{x+k2\pi}$ où k est un entier relatif.
- Si x' est un nombre réel tel que $\boldsymbol{x-x'=k2\pi}$ où k est un entier relatif, alors M est aussi le point associé à x'.

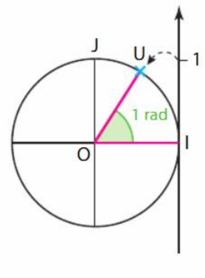
Points associés à connaître



2 Une nouvelle unité de mesure d'angle : le radian

A Mesure en radians d'angles géométriques

Définition Soit U le point du cercle trigonométrique associé au nombre réel 1. On définit **1 radian** (1 rad) comme la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IOU}$.

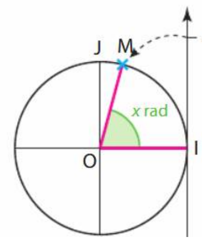


Définition Soit x un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\pi]$ et M le point du cercle trigonométrique de centre O associé à x.
x est appelé la **mesure en radians** de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$.

Exemple • J est le point associé au nombre réel $\frac{\pi}{2}$ donc $\widehat{IOJ}$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ rad.

Propriété Les mesures en degrés et en radians d'un angle géométrique sont **proportionnelles**.

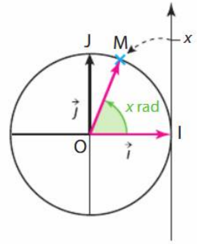
Mesure en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π



B Mesures en radians d'angles orientés de vecteurs

Une autre appellation de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$ est $\widehat{MOI}$. Si pour aller de I à M, le chemin est aussi long que pour se rendre de M à I, il ne s'effectue pas dans le même sens. C'est pour différencier ces deux angles que l'on va définir des angles orientés de vecteurs.

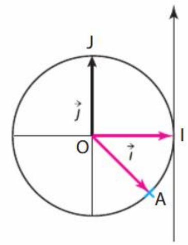
Définition Soit x un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique de centre O associé à x.
On dit que x est une mesure en radians de **l'angle orienté** de vecteurs $(\vec{i}\,,\vec{OM})$.



Remarque • M étant le point associé à tous les nombres réels de la forme $x + k2\pi$ où k est un entier relatif, l'angle orienté $(\vec{i}\,,\vec{OM})$ admet donc x comme mesure en radians mais également tous les nombres réels de la forme $x + k2\pi$ où k est un entier relatif.

C Mesure principale d'un angle orienté de vecteurs

Définition La mesure **principale** d'un angle orienté de vecteurs est l'unique mesure de cet angle **appartenant à l'intervalle** $]-\pi\,;\pi]$.



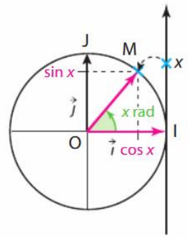
Exemple • $-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}; \ldots$ sont des mesures de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{i}\,,\vec{OA})$. Mais la mesure principale de cet angle est $-\frac{\pi}{4}$ car c'est la seule qui appartienne à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

→ Voir Exercices résolus 3 et 4

3 Cosinus et sinus d'angles orientés de vecteurs

A Définitions et valeurs remarquables

Définition Soit M un point du cercle trigonométrique de centre O et x une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{i}\,,\vec{OM})$.
Le **cosinus** de x est l'abscisse du point M ; on le note **cos x**.
Le **sinus** de x est l'ordonnée du point M ; on le note **sin x**.



Valeurs remarquables : le tableau ci-dessous donne des valeurs de cosinus et de sinus à connaître car elles sont souvent utilisées dans les exercices.

Mesure en radians x de l'angle orienté $(\vec{i}\,,\vec{OM})$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

B Propriétés immédiates

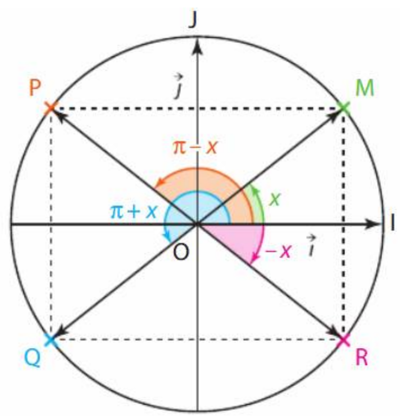
Propriétés Pour tout nombre réel x,
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$,
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(x + k2\pi) = \cos x \quad \sin(x + k2\pi) = \sin x \quad$ (k entier relatif)

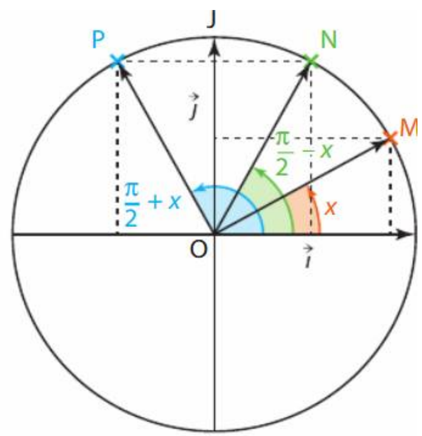
Remarque • $\cos^2 x$ signifie $(\cos x)^2$.

4 Angles associés

Propriétés Pour tout nombre réel x,
- $\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

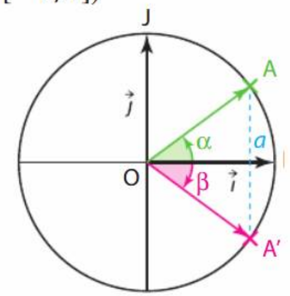
Remarque • Le cercle trigonométrique permet de retrouver facilement ces propriétés.





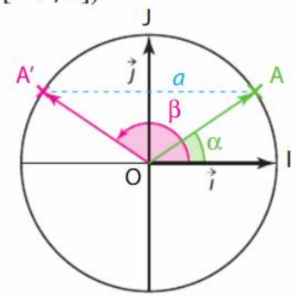
5 Équations trigonométriques

Équations de la forme $\cos x = a$
($a \in [-1\,;1]$)



Sur le cercle trigonométrique, il existe deux points A et A′ d'abscisse a ; ils sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Équations de la forme $\sin x = a$
($a \in [-1\,;1]$)



Sur le cercle trigonométrique, il existe deux points A et A′ d'ordonnée a ; ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Propriété Si on note α une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{OA})$ et ß une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{OA'})$ alors les équations **$\cos x = a$** et **$\sin x = a$** admettent dans ℝ deux familles de solutions :
$x = a + k2\pi$ et $x = \beta + k2\pi$ où k est un entier relatif.

Remarque • Si l'équation à résoudre est $\cos x = a$ alors on peut prendre $ß = -\alpha$ et si l'équation à résoudre est $\sin x = a$ alors on peut prendre $\beta = \pi - \alpha$.

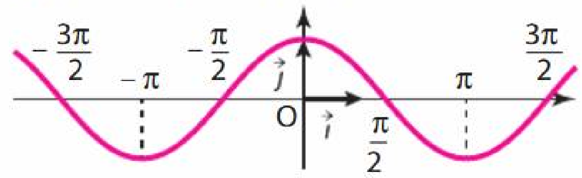
6 Fonctions trigonométriques

On s'intéresse aux deux fonctions trigonométriques définies sur ℝ :
cos : $x \mapsto \cos x$ et **sin** : $x \mapsto \sin x$.
On a vu dans le cours **3B** p. 176 que pour tout nombre réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

Propriété Les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions **périodiques** de période **2π**.

Conséquence graphique : dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont invariantes par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.
On a également vu dans le cours **4** que pour tout nombre réel x, $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

Représentation graphique de la fonction cosinus sur ℝ



Propriétés La fonction **cosinus** est une fonction **paire**, la fonction **sinus** est une fonction **impaire**.

Conséquence graphique : dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celle de la fonction sinus est symétrique par rapport à O.

Représentation graphique de la fonction sinus sur ℝ