1ère STL — TD 5 : Trigonométrie — 2021

Ex 1 :

x désigne un nombre réel appartenant à un intervalle I.

Déterminer la valeur exacte de $\sin(x)$ dans les cas suivants:

1. $\cos(x) = \dfrac{1}{3}$ et $I = \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ et $I = \left[\dfrac{-\pi}{2} ; 0\right]$.

Ex 2 :

x désigne un nombre réel appartenant à un intervalle I.

Déterminer la valeur exacte de $\sin(x)$ dans les cas suivants:

1. $\cos(x) = \dfrac{5}{7}$ et $I = [0 ; \pi]$.
2. $\cos(x) = \dfrac{-3}{5}$ et $I = \left]-\pi ; \dfrac{-\pi}{2}\right]$.

Ex 3 :

x désigne un nombre réel appartenant à un intervalle donné.

Déterminer la valeur exacte de $\cos(x)$ dans les cas suivants:

1. $\sin(x) = \dfrac{2}{3}$ avec $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
2. $\sin(x) = 0{,}6$ avec $\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$.

Ex 4 :

x désigne un nombre réel appartenant à un intervalle donné.

Déterminer la valeur exacte de $\cos(x)$ dans les cas suivants:

1. $\sin(x) = -0{,}8$ avec $\dfrac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$.
2. $\sin(x) = \dfrac{4}{5}$ avec $\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$, avec $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et avec $\dfrac{-\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Ex 5 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

1. En déduire la relation entre $\cos^2(x)$ et $\cos^2(2x)$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Quelles sont alors les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$?
3. Même question pour $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.
4. Trouver la relation entre $\cos(2x)$ et $\sin^2(x)$.

Ex 6 :

Sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin(5x) = 16\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x)$,

calculer $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Ex 7 :

1. Rappeler les relations entre $\cos(2x)$ et $\cos^2(x)$, et entre $\cos(2x)$ et $\sin^2(x)$, pour tout réel x.
2. A l'aide de ces relations, calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
3. On donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   - $\cos(x - y) = \cos(x) \times \cos(y) + \sin(x) \times \sin(y)$,
   - $\sin(x - y) = \sin(x) \times \cos(y) - \cos(x) \times \sin(y)$.

   En ayant recours à ces formules, montrer que:

   - $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
   - $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
4. Les résultats des questions 2. et 3. sont-ils égaux ?

Ex 8 :

1. Rappeler les relations entre $\cos(2x)$ et $\cos^2(x)$, et entre $\cos(2x)$ et $\sin^2(x)$, pour tout réel x.
2. A l'aide de ces relations, calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.
3. On donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   - $\cos(x + y) = \cos(x) \times \cos(y) - \sin(x) \times \sin(y)$,
   - $\sin(x + y) = \sin(x) \times \cos(y) + \cos(x) \times \sin(y)$.

   En ayant recours à ces formules, montrer que:

   - $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
   - $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.
4. Les résultats des questions 2. et 3. sont-ils égaux ?

Ex 9 :

1. Rappeler les relations entre $\cos(2x)$ et $\cos^2(x)$, et entre $\cos(2x)$ et $\sin^2(x)$, pour tout réel x.
2. En déduire $\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et $\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
3. Calculer alors $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ de deux façons différentes.

Ex 10 :

1. Rappeler les formules du cours de $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.
2. Simplifier l'expression suivante:

$$A = -\cos(\pi - x) + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 7\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sin(x + 3\pi) + 3\sin(-x).$$

3. Application: calculer A quand $x = \dfrac{3\pi}{2}$.