

# COURS : Fonctions – Continuité & TVI

## Table des matières

|  |          |
|--|----------|
| <b>1 Limite finie ou infinie à l'infini</b>        | <b>2</b> |
| 1.1 Limite finie à l'infini                        | 2        |
| 1.2 Limite infinie à l'infini                      | 2        |
| 1.3 Limites en l'infini des fonctions de référence | 3        |
| <b>2 Limite en un point</b>                        | <b>3</b> |
| 2.1 Limite infinie en un point                     | 3        |
| 2.2 Limites en 0 des fonctions élémentaires        | 4        |
| 2.3 Limite finie en un point                       | 4        |
| <b>3 Opérations sur les limites</b>                | <b>4</b> |
| 3.1 Somme de fonctions                             | 4        |
| 3.2 Produit de fonctions                           | 5        |
| 3.3 Quotient de fonctions                          | 6        |
| 3.4 Conclusion                                     | 6        |
| <b>4 Limite d'une fonction composée</b>            | <b>7</b> |
| <b>5 Théorèmes des gendarmes et de comparaison</b> | <b>8</b> |
| <b>6 Continuité</b>                                | <b>9</b> |
| 6.1 Continuité en un point                         | 9        |
| 6.2 Continuité des fonctions usuelles              | 10       |
| 6.3 Continuité et suite                            | 10       |
| 6.4 Continuité et dérivabilité                     | 11       |
| 6.5 Continuité et équation                         | 12       |

## 1 Limite finie ou infinie à l'infini

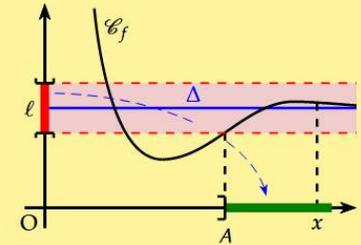
### 1.1 Limite finie à l'infini

**Définition 1 :** Une fonction  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $+\infty$ , si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$ , contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez grand - c'est à dire pour  $x \in ]A; +\infty[$ . On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

La droite  $\Delta$  d'équation  $y = \ell$  est dite **asymptote horizontale** à  $\mathcal{C}_f$ .

On définit de façon analogue  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$  avec  $x \in ]-\infty; B[$ .



**Remarque :** Aussi petit que soit l'intervalle contenant  $\ell$ , il faut pouvoir trouver  $A$ .

**Exemple :**  $x \mapsto \frac{1}{x}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  ont des limites nulles en  $+\infty$ .  
 $x \mapsto e^x$  a pour limite 0 en  $-\infty$ .

Leurs courbes admettent alors la droite d'équation  $y = 0$  (l'axe des abscisses) comme asymptote horizontale.

### 1.2 Limite infinie à l'infini

**Définition 2 :** Une fonction  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$ , si tout intervalle  $]M; +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez grand - c'est à dire pour  $x \in ]A; +\infty[$ . On note alors :

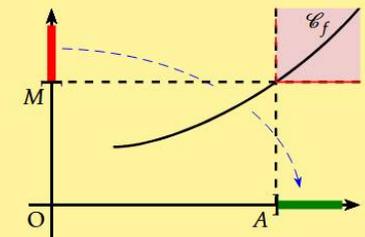
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

On définit de façon analogue :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ de } ]M; +\infty[ \text{ vers } ]-\infty; B[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ de } ]-\infty; m[ \text{ vers } ]A; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ de } ]-\infty; m[ \text{ vers } ]-\infty; B[$$



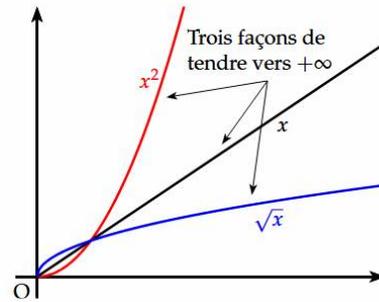
**Remarque :** Aussi grand que soit  $M$ , il faut pouvoir trouver  $A$ .

**Exemple :**  $x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*, x \mapsto \sqrt{x}$  et  $x \mapsto e^x$  ont pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$ .

$x \mapsto x^n$  a pour limite  $+\infty$  en  $-\infty$  si  $n$  est pair et  $-\infty$  en  $-\infty$  si  $n$  est impair.

Une fonction peut tendre vers  $+\infty$  en  $+\infty$  de plusieurs façons. C'est le cas par exemple des fonctions  $x \mapsto x^2, x \mapsto x$  et  $x \mapsto \sqrt{x}$ .

- $x \mapsto x^2$  tend « rapidement » vers l'infini. La concavité est tournée vers le haut.
- $x \mapsto x$  tend « moyennement » vers l'infini. Pas de concavité.
- $x \mapsto \sqrt{x}$  tend « lentement » vers l'infini. La concavité est tournée vers le bas



### 1.3 Limites en l'infini des fonctions de référence

| $f(x)$                              | $x^n$  | $\frac{1}{x^n}$ | $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $e^x$     | $e^{ax}$                         |
|-------------------------------------|--|-----------------|------------|----------------------|-----------|----------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ | $+\infty$  | $0$             | $+\infty$  | $0$                  | $+\infty$ | $+\infty \ a > 0$<br>$0 \ a < 0$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ | $+\infty \ n \text{ pair}$<br>$-\infty \ n \text{ impair}$ | $0$             | non défini | non défini           | $0$       | $0 \ a > 0$<br>$+\infty \ a < 0$ |

## 2 Limite en un point

### 2.1 Limite infinie en un point

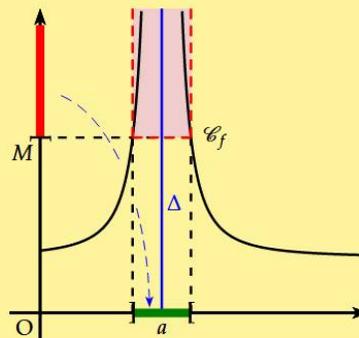
**Définition 3 :** Une fonction  $f$  a pour limite

$+\infty$  en  $a$ , si tout intervalle  $]M; +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez proche de  $a$  - c'est à dire pour les  $x$  d'un intervalle ouvert contenant  $a$ . On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

La droite  $\Delta$  d'équation  $x = a$  est dite **asymptote verticale** à  $\mathcal{C}_f$

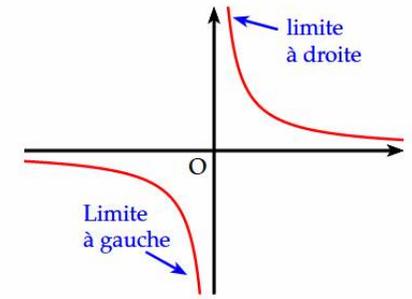
On définit de façon analogue  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$



On définit la limite à gauche ou à droite de  $x = a$  lorsque la limite en  $x = a$  n'existe pas :

limite à gauche :  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  ou  $\lim_{x < a} f(x)$

limite à droite :  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  ou  $\lim_{x > a} f(x)$



La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  n'admet pas de limite en 0, mais admet une limite à gauche et à droite de 0.

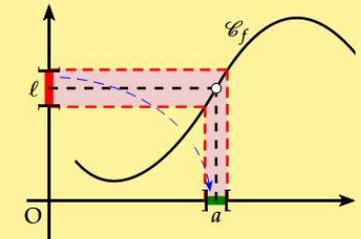
### 2.2 Limites en 0 des fonctions élémentaires

| $f(x)$                          | $\frac{1}{x^n}$  | $\frac{1}{\sqrt{x}}$ |
|---------------------------------|--|----------------------|
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ | $+\infty$  | $+\infty$            |
| $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ | $+\infty \ n \text{ pair}$<br>$-\infty \ n \text{ impair}$ | non défini           |

### 2.3 Limite finie en un point

**Définition 4 :** Une fonction  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $a$ , si que tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez proche de  $a$ . On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$



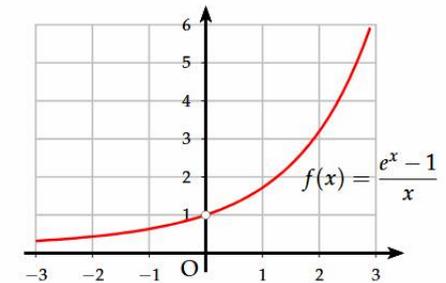
**Exemple :**  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1 = 3$ .

Une fonction peut ne pas être définie et admettre une limite en  $a$ .

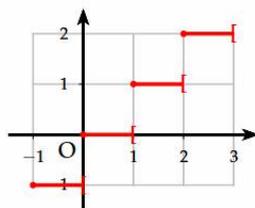
Par exemple la fonction  $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$  n'est pas définie en 0 mais :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Taux d'accroissement de exp en 0.



**Remarque :** Parfois la fonction  $f$  n'admet pas une limite en  $a$ , mais admet une limite à droite et une limite à gauche. C'est le cas de la fonction partie entière  $E$ . On a par exemple :  $\lim_{x \rightarrow 2^-} E(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} E(x) = 2$



### 3 Opérations sur les limites

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions et  $a$  un réel ou  $\pm\infty$ . On note F.I. une forme indéterminée

#### 3.1 Somme de fonctions

|  |          |           |           |           |           |           |
|--|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$          | $l$      | $l$       | $l$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$          | $l'$     | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I.      |

**Exemples :**

1) Limite en  $+\infty$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 3 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

2) Limite en  $+\infty$  et  $-\infty$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2 + x$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par somme, on ne peut conclure} \\ \text{Forme indéterminée : } +\infty - \infty \end{array}$$

#### 3.2 Produit de fonctions

|   |               |            |          |            |
|---|---------------|------------|----------|------------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$             | $l$           | $l \neq 0$ | $0$      | $\infty$   |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$             | $l'$          | $\infty$   | $\infty$ | $\infty$   |
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x)$ | $l \times l'$ | $\infty^*$ | F.I.     | $\infty^*$ |

\*Appliquer la règle des signes

**Exemples :**

1) Limite en  $-\infty$  de la fonction précédente :  $f(x) = x^2 + x$

Pour lever la forme indéterminée, on factorise  $f(x)$  par le terme prédominant :

$$f(x) = x^2 + x = x^2 \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$$

On a alors avec le produit :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par produit} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

2) Limite en  $+\infty$  de la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :  $f(x) = x - \sqrt{x}$

Forme indéterminée, on factorise  $f(x)$  par le terme prédominant :

$$f(x) = x - \sqrt{x} = x \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par produit} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

3) Limite à droite de 0 de la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{1}{x} \sin x$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par produit, on ne peut conclure} \\ \text{Forme indéterminée } 0 \times \infty \end{array}$$

#### 3.3 Quotient de fonctions

|  |                |            |      |          |            |          |
|--|----------------|------------|------|----------|------------|----------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$              | $l$            | $l \neq 0$ | $0$  | $l$      | $\infty$   | $\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$              | $l' \neq 0$    | $0^{(1)}$  | $0$  | $\infty$ | $l'^{(1)}$ | $\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ | $\frac{l}{l'}$ | $\infty^*$ | F.I. | $0$      | $\infty^*$ | F.I.     |

\*Appliquer la règle des signes

(1) doit avoir un signe constant

Exemples :

1) Limite en  $-2$  de la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{-2\}$  par :  $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

On détermine le signe de  $(x+2)$  :

|       |           |      |           |
|-------|-----------|------|-----------|
| $x$   | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
| $x+2$ |           | $-$  | $+$       |

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2} 2x - 1 = -5 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} x + 2 = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} x + 2 = 0^- \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \end{array}$$

On en déduit alors une asymptote verticale d'équation  $x = -2$ .

2) Limite en  $+\infty$  de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$

Forme indéterminée :  $\frac{\infty}{\infty}$ . On factorise numérateur et dénominateur par le terme prépondérant :

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x+2} = \frac{x \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(3 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{2 + \frac{1}{x}}{3 + \frac{2}{x}}$$

$$\text{On obtient alors : } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{2}{x} = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{3} \end{array}$$

### 3.4 Conclusion

Il existe quatre formes indéterminées où les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure. Dans les cas d'indétermination, on peut :

- mettre en facteur le terme prépondérant (pour les polynômes et les fonctions rationnelles) en l'infini,
- simplifier pour la forme zéro sur zéro en un point,
- multiplier par la quantité conjuguée (pour les fonctions irrationnelles),
- utiliser un théorème de comparaison,
- effectuer un changement de variable ...

## 4 Limite d'une fonction composée

**Théorème 1 :** Soit deux fonctions  $f, g$  et  $a, b, c$  des réels ou  $\pm\infty$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = c$$

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right) : \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par composition, on a :} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = 1 \end{array}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} : \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par composition, on a :} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \end{array}$$

On peut éventuellement faire un changement de variable en posant  $X = \frac{1}{x}$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

**Théorème 2 :** Limites de fonctions et de suites

Soit une suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = f(n)$ .  $f$  est alors la fonction réelle associée à la suite  $(u_n)$ . Soit  $a$  un réel ou  $\pm\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$$

Exemple : Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par :  $u_n = \sqrt{2 + \frac{1}{n^2}}$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x^2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par composition} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{2} \end{array} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}$$

**Remarque :** La limite de  $f$  est transmise à la suite mais la réciproque est fautive. Une suite  $(u_n)$  peut admettre une limite sans que sa fonction associée en ait une. Pour s'en convaincre :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = 2 & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ f(x) = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La limite de  $f$  en  $+\infty$  n'existe manifestement pas. La suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = f(n)$  est constante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ .



## 5 Théorèmes des gendarmes et de comparaison

**Théorème 3 :**  $f, g, h$  trois fonctions définies sur  $I = ]b; +\infty[$  et  $\ell$  un réel.

Si pour tout  $x \in I$  :

**Théorème des « Gendarmes »** (pour montrer une limite finie)

$$\left. \begin{array}{l} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

**Théorèmes de comparaison** (pour montrer une limite infinie)

$$\left. \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \left. \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

**Démonstration :**

1) Théorème des gendarmes : en  $+\infty$

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$  alors, d'après la définition des limites finies, tout intervalle ouvert  $J$  contenant  $\ell$ , contient toutes les valeurs de  $g(x)$  et  $h(x)$  pour  $x$  assez grand.

Comme  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  il en est de même pour  $f(x)$ .

Conclusion :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

2) Théorème de comparaison : en  $+\infty$  dans le cas où  $f(x) \geq g(x)$

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  alors d'après la définition des limites infinies, tout intervalle ouvert  $]M; +\infty[$ , contient toutes les valeurs de  $g(x)$  pour  $x$  assez grand.

Comme  $f(x) \geq g(x)$  il en est de même pour  $f(x)$ .

Conclusion :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

**Exemples :**

1) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

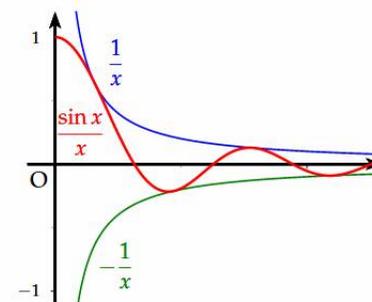
Pour tout réel positif  $x$  :

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

D'après le théorème des Gendarmes, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$



2) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \cos x$

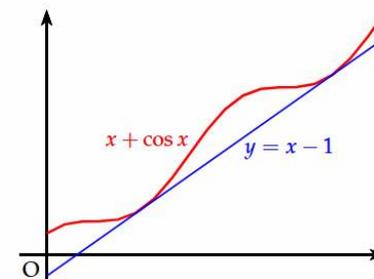
Pour tout réel  $x$  :

$$\cos x \geq -1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x + \cos x \geq x - 1$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty,$$

d'après le théorème de comparaison, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$



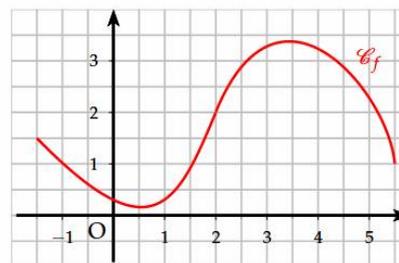
## 6 Continuité

### 6.1 Continuité en un point

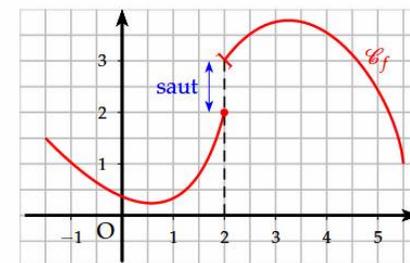
**Définition 5 :** Soit une fonction  $f$  définie sur un intervalle ouvert  $I$  contenant le réel  $a$ . On dit que  $f$  est **continue** en  $a$  si et seulement si :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

La fonction  $f$  est **continue sur un intervalle**  $I$  si, et seulement si,  $f$  est continue en tout point de  $I$ .

**Remarque :** Graphiquement, la continuité d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  se traduit par une courbe en « un seul morceau ».



$f$  continue sur  $I = [-1, 5; 5, 5]$



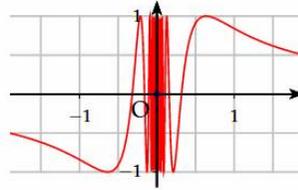
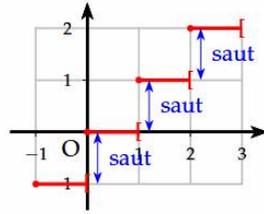
$f$  discontinue en 2 car  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \neq f(2)$

La fonction de droite représente une discontinuité par « saut ». Un autre exemple bien connu est la discontinuité de la fonction partie entière en chaque valeur entière.

Cependant d'autres discontinuités existent et l'expression « en un seul morceau » n'est alors pas correcte. Il faut alors revenir à la définition de la limite

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par 
$$\begin{cases} f(x) = \sin \frac{1}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$f$  n'admet pas de limite en 0 mais l'on observe aucun « saut ». La fonction oscille de plus en plus en 0 entre les valeurs  $-1$  et  $1$ . En 0, la fonction tend vers une « oscillation infinie » qui explique la non continuité.



## 6.2 Continuité des fonctions usuelles

On a le tableau de continuité des fonctions de référence suivant :

| Fonctions usuelles                         | Intervalle de continuité             |
|--|--------------------------------------|
| $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$             | $\mathbb{R}$                         |
| $f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$ | $] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$                          | $[0 ; +\infty[$                      |
| $f(x) =  x $                               | $\mathbb{R}$                         |
| $f(x) = e^x$                               | $\mathbb{R}$                         |
| $f(x) = \sin x$ et $f(x) = \cos x$         | $\mathbb{R}$                         |

### Théorème 4 : Continuité des fonctions usuelles (admis)

Toutes fonctions construites par somme, produit, quotient ou composition à partir des fonctions de référence sont continues sur leur ensemble de définition.

**Exemple** : La fonction  $x \mapsto e^{\cos(x^2+1)}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  par somme et composition de fonction continues sur  $\mathbb{R}$ .

## 6.3 Continuité et suite

### Théorème 5 : Théorème du point fixe

Soit une suite  $(u_n)$  définie par la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$  convergente vers  $\ell$ . Si la fonction associée  $f$  est continue en  $\ell$ , alors la limite de la suite  $\ell$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ .

**Démonstration** :

On sait que la suite  $(u_n)$  est convergente vers  $\ell$  donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

De plus, la fonction  $f$  est continue en  $\ell$  donc :  $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$

Par composition, on en déduit que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = f(\ell)$

or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$  donc  $\ell = f(\ell)$

**Remarque** : La condition de continuité de  $f$  en  $\ell$  est indispensable.

Comme  $\ell$  n'est « a priori » pas connue, on donnera en pratique l'ensemble de continuité de la fonction  $f$ .

Si l'équation  $f(x) = x$  admet plusieurs solutions, on encadrera  $\ell$  pour choisir la solution correspondante à la limite.

**Exemple** : Soit la suite  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$$

On montre par récurrence que  $(u_n)$  est positive, croissante et majorée par 4, d'après le théorème des suites monotone,  $(u_n)$  est convergente vers une limite  $\ell$ .

La fonction  $x \mapsto \sqrt{3x+4}$  est continue sur  $[-\frac{3}{4}; +\infty[$  donc sur  $[0; 4]$ , d'après le théorème du point fixe, sa limite  $\ell$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ .

$$\sqrt{3x+4} = x \stackrel{|\cdot|}{\Rightarrow} 3x+4 = x^2 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 4$$

Comme  $u_n \geq 0$ , la seule solution acceptable est 4. La suite  $(u_n)$  converge vers 4.

## 6.4 Continuité et dérivabilité

### Théorème 6 : Admis

- Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors la fonction  $f$  est continue en  $a$ .
- Si  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  alors la fonction  $f$  est continue sur  $I$ .

**Démonstration :** Montrons que la dérivabilité en  $a$  entraîne la continuité en  $a$ .

Pour  $x \neq a$ , posons  $t(x)$  le taux d'accroissement de la fonction  $f$  en  $a$  :

$$t(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow (x - a)t(x) = f(x) - f(a) \Rightarrow f(x) = (x - a)t(x) + f(a)$$

La fonction  $f$  est dérivable en  $a$  :  $\lim_{x \rightarrow a} t(x) = f'(a)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} x - a = 0$

donc par produit  $\lim_{x \rightarrow a} (x - a)t(x) = 0$  et par somme  $\lim_{x \rightarrow a} (x - a)t(x) + f(a) = f(a)$ .

On a alors :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . La fonction  $f$  est continue en  $a$ .

**Remarque :** La réciproque de ce théorème est fautive. Une fonction peut être continue en un point  $a$  sans pour cela être dérivable.

C'est le cas de la fonction valeur absolue, VA,  $x \mapsto |x|$  en 0.

- VA est continue en 0 :

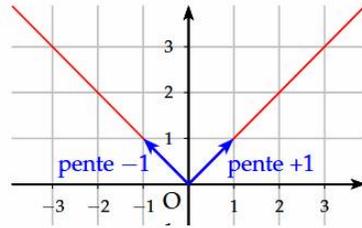
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{cases}$$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$

- VA n'est pas dérivable en 0 :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \end{cases}$$

Pas de limite du taux d'accroissement en 0.



La courbe est en « un seul morceau » et possède un point anguleux en 0.

## 6.5 Continuité et équation

### **Théorème 7 :** Théorème des valeurs intermédiaires - Admis

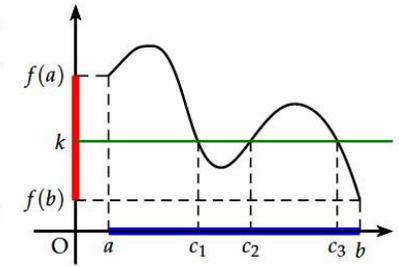
Soit une fonction **continue** sur un intervalle  $I = [a, b]$ .

Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet au moins une solution  $c$  dans  $I$ .

**Remarque :** Ce théorème résulte du fait que l'image d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  par une fonction continue est un intervalle de  $\mathbb{R}$

Ci-contre,  $k$  est bien compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . L'équation  $f(x) = k$  admet donc des solutions.

L'existence de  $c$  ne veut pas dire qu'il soit unique. Ici, il existe 3 valeurs pour  $c$  :  $c_1, c_2, c_3$ .

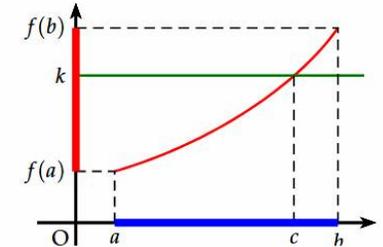


### **Théorème 8 :** Théorème des valeurs intermédiaires bis - TVI

Soit une fonction  $f$  **continue et strictement monotone** sur  $I = [a, b]$ .

Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution dans  $I$

**Démonstration :** L'existence d'une solution est montrée par le théorème précédent. On montre l'unicité par l'absurde : supposons que l'équation  $f(x) = k$  admette deux solutions distinctes  $c_1$  et  $c_2$ , avec  $c_1 < c_2$ , la stricte monotonie de la fonction  $f$  entraîne pour  $f$  croissante  $f(c_1) < f(c_2)$ , ou pour  $f$  décroissante  $f(c_1) > f(c_2)$ , ce qui est contradictoire avec  $f(c_1) = f(c_2) = k$ .



**Remarque :**

- Ce deuxième théorème est aussi appelé théorème de la bijection. Par la suite on appellera ce théorème, le théorème des valeurs intermédiaires, noté TVI.
- On généralise ce théorème à l'intervalle ouvert  $I = ]a, b[$ . Le réel  $k$  doit alors être compris entre  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$
- Lorsque  $k = 0$ , on pourra montrer que  $f(a) \times f(b) < 0$ .
- Un tableau de variation pourra être suffisant pour montrer la continuité et la monotonie de la fonction.

**Exemple :** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 + x - 1$ .

Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  n'admet qu'une solution sur  $\mathbb{R}$ .

On donnera un encadrement à l'unité de cette solution.

Trouver ensuite, à l'aide d'un algorithme un encadrement à  $10^{-6}$  de cette solution.