

COURS : Fonctions – Dérivation & Convexité

Table des matières

1 Rappels sur la dérivabilité	2
1.1 Définition	2
1.2 Interprétations	3
1.2.1 Interprétation graphique	3
1.2.2 Interprétation numérique	3
1.2.3 Interprétation cinématique	3
1.3 Signe de la dérivée, sens de variation	3
1.4 Dérivée et extremum	4
2 Dérivée d'une fonction composée	4
2.1 Composition de deux fonctions	4
2.2 Monotonie d'une fonction composée	5
2.3 Dérivée de la composée	5
3 Dérivées des fonctions usuelles	6
3.1 Dérivée des fonctions élémentaires	6
3.2 Règles de dérivation	6
4 Convexité	7
4.1 Définitions	7
4.2 Inégalité	7
4.3 Dérivée seconde	8

1 Rappels sur la dérivabilité

1.1 Définition

Définition 1 : Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I contenant a .

La fonction f est dérivable en a si et seulement si le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie ℓ , c'est à dire :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \text{ ou encore } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

Dans ce cas, on appelle ℓ le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$

Lorsque la fonction f est dérivable sur un intervalle I , on note f' , la fonction dérivée qui à tout x de I associe son nombre dérivée $f'(x)$.

Remarque :

- Si la fonction f est dérivable en a alors la fonction f est continue en a
- Les physiciens expriment volontiers une variation à l'aide des symboles Δ et d . Ils notent $\Delta x = x - a$ et $\Delta y = f(x) - f(a)$; ou dx et dy pour une variation très petite. On obtient alors la notation différentielle de la dérivée :

$$f' = \frac{dy}{dx} \text{ et } f'(a) = \frac{dy}{dx}(a)$$

Exemple : Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x-4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Continuité de f en 1 : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = -3$

- Dérivabilité en 1 :

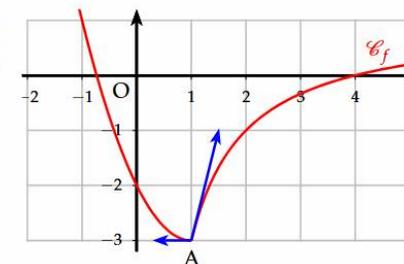
on étudie les limites à gauche et à droite du taux de variation en 1 :

$$x \leq 1: \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 2(1+h) - 2 - (-3)}{h} = \frac{h^2}{h} = h \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} 0$$

$$x > 1: \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{1+h-4}{1+h} + 3}{h} = \frac{4h}{h(1+h)} = \frac{4}{1+h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 4$$

Donc les limites ne sont pas égales donc la fonction f n'est pas dérivable en 1.

Graphiquement la fonction f est en un seul morceau (continue en 1) et possède un point anguleux en 1 (non dérivable en 1).



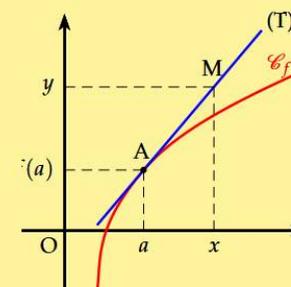
1.2 Interprétations

1.2.1 Interprétation graphique

Théorème 1 : Tangente.

Lorsque f est dérivable en a , la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$ dont l'équation est :

$$(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



Remarque : Retenir que $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente.

1.2.2 Interprétation numérique

Théorème 2 : Si une fonction f est dérivable en a , une approximation affine, lorsque $a + h$ est voisin de a est : $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$.

Exemple : Déterminer une approximation affine de $\sqrt{4,03}$.

Soit $f(x) = \sqrt{x}$, donc $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ avec $a = 4$ et $h = 0,03$.

$$\sqrt{4,03} \approx f(4) + 0,03f'(4) \approx 2 + 0,03 \times \frac{1}{4} \approx 2,0075$$

La calculatrice donne $\sqrt{4,03} \approx 2,007486$, la précision est donc de 10^{-4} .

1.2.3 Interprétation cinématique

Si $x(t)$ est la loi horaire d'un mouvement sur (Ox) , alors $x'(t)$ représente la vitesse instantanée à l'instant t . De même, si $v(t)$ est la vitesse instantanée à l'instant t , alors $v'(t)$ représente l'accélération a à l'instant t .

En notations différentielles : $v = \frac{dx}{dt}$ et $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

1.3 Signe de la dérivée, sens de variation

Théorème 3 : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I .

- Si $f' = 0$, alors f est constante.
- Si $f' > 0$ (sauf en quelques points isolés de I où f' s'annule), alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f' < 0$ (sauf en quelques points isolés de I où f' s'annule), alors f est strictement décroissante sur I .

Remarque : L'étude des variations d'une fonction dérivable consiste à étudier le signe de la dérivée.

Exemple : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$.

- f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$.
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ou $x_2 = 4$
- $f'(x)$ est positive à l'extérieur des racines et négative à l'intérieur.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-31	$+\infty$

1.4 Dérivée et extremum

Théorème 4 : Soit une fonction f dérivable sur I ouvert contenant a .

- Si f admet un extremum en a alors $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe en a alors f admet un extremum en a .

Remarque : Les extremum d'une fonction sont à chercher parmi les zéros de f' , mais $f'(a) = 0$, n'implique pas nécessairement un extremum en a .

Si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$ et 0 n'est pas extremum..

Conséquence Les problèmes d'optimisation consistent à déterminer une fonction dérivable et à déterminer les extremum locaux.

2 Dérivée d'une fonction composée

2.1 Composition de deux fonctions

Définition 2 : Soit u et v deux fonctions définies respectivement sur I et J tels que $u(I) \subset J$, c'est à dire que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.

On appelle composée de u par v , la fonction notée $v \circ u$, définie sur I par :

$$v \circ u(x) = v[u(x)]$$

Exemple : $u(x) = 3x - 4$ et $v(x) = \sqrt{x}$ alors $v \circ u(x) = v(3x - 4) = \sqrt{3x - 4}$

v est définie sur $J = \mathbb{R}_+$, la condition sur I est $3x - 4 \geq 0$ soit $I = \left[\frac{4}{3}; +\infty \right[$

On peut faire le schéma suivant : $x \xrightarrow{u} 3x - 4 \xrightarrow{v} \sqrt{3x - 4}$

2.2 Monotonie d'une fonction composée

Théorème 5 : Soit les fonctions u et v définies respectivement sur I et $u(I)$.

- Si u et v ont même variation alors $v \circ u$ est croissante sur I .
- Si u et v ont des variations opposés alors $v \circ u$ est décroissante sur I .

Démonstration : Dans le cas où u croissante sur I et v décroissante sur $u(I)$.

u est croissante : $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow u(x_1) < u(x_2)$

v est décroissante : $\forall u(x_1), u(x_2) \in u(I), u(x_1) < u(x_2) \Rightarrow v[u(x_1)] > v[u(x_2)]$

On a donc : $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow v[u(x_1)] > v[u(x_2)]$

La fonction $v \circ u$ est décroissante sur I .

Exemple : Soit f définie sur $] -\infty; 1]$ par : $f(x) = \sqrt{1-x}$.

La fonction f se décompose en $v \circ u$, avec : $u(x) = 1-x$ et $v(x) = \sqrt{x}$

La fonction u est affine décroissante sur $] -\infty; 1]$ et v est croissante sur $[0; +\infty[$ d'après la monotonie des fonctions composées, f est décroissante sur $] -\infty; 1]$

⚠ Il n'est donc pas nécessaire pour ce cas de déterminer le signe de la dérivée pour connaître les variations de la fonction f .

2.3 Dérivée de la composée

Théorème 6 : Soit u et v deux fonctions dérivables respectivement que I et J tels que $u(I) \subset J$, alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et : $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$

Exemple : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \cos(x^2 - 1)$.

- On décompose la fonction $f = v \circ u$ avec $u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = \cos x$
- u et v sont dérivable sur \mathbb{R} donc f est dérivable sur \mathbb{R} .
- $f'(x) = u'(x) \times v' \circ u(x) = 2x[-\sin(x^2 - 1)] = -2x \sin(x^2 - 1)$

Démonstration : L'idée de la démonstration est d'étudier la limite du taux de variation de $f = v \circ u$ au voisinage d'un point $a \in I$ avec $\forall x \neq a, u(x) \neq u(a)$.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{v \circ u(x) - v \circ u(a)}{x - a} = \underbrace{\frac{v[u(x)] - v[u(a)]}{u(x) - u(a)}}_{\text{dérivée de } v \text{ en } u(a)} \times \underbrace{\frac{u(x) - u(a)}{x - a}}_{\text{dérivée de } u \text{ en } a}$$

d'où $(v \circ u)'(a) = v'[u(a)] \times u'(a)$

Remarque : La dérivée de la composée explique les autres formules.

Exemples :

- $f(x) = (3x - 5)^4$ forme $(u^n)'$ d'où $f'(x) = 4 \times 3(3x - 5)^3 = 12(3x - 5)^3$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ forme $(\sqrt{u})'$ d'où $f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$
- $f(x) = e^{-3x+5}$ forme $(e^u)'$ d'où $f'(x) = -3e^{-3x+5}$
- $f(x) = \sin(e^x)$ forme $(v \circ u)'$ d'où $f'(x) = e^x \cos(e^x)$

3.1 Dérivée des fonctions élémentaires

Fonction	D_f	Dérivée	$D_{f'}$
$f(x) = k$	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = x$	\mathbb{R}	$f'(x) = 1$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}^*	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^*
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	\mathbb{R}	$f'(x) = e^x$	\mathbb{R}
$f(x) = \sin x$	\mathbb{R}	$f'(x) = \cos x$	\mathbb{R}
$f(x) = \cos x$	\mathbb{R}	$f'(x) = -\sin x$	\mathbb{R}

3.2 Règles de dérivation

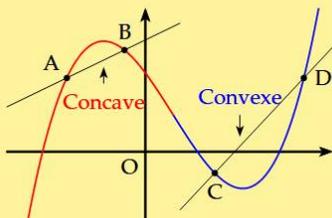
Dérivée de la somme	$(u + v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(ku)' = ku'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Dérivée de l'exponentielle	$(e^u)' = u' e^u$
Dérivée de la composée	$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$

4 Convexité

4.1 Définitions

Définition 3 : Soit une fonction f de courbe représentative \mathcal{C}_f .

- On appelle sécante de \mathcal{C}_f la droite passant par deux points de \mathcal{C}_f .
- On dit que f est convexe sur I si \mathcal{C}_f est en dessous de ses sécantes sur I .
- On dit que f est concave sur I si \mathcal{C}_f est au dessus de ses sécantes sur I .



Exemples : La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur \mathbb{R}_+^* et concave sur \mathbb{R}_-^* .
Les fonctions carrée et exponentielle $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes sur \mathbb{R} .
La fonction racine $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur \mathbb{R}_+ .

4.2 Inégalité

Théorème 7 : Soit f une fonction définie sur I contenant a et b et $t \in [0; 1]$.

- Si f est convexe alors : $f[ta+(1-t)b] \leq tf(a) + (1-t)f(b)$.
- Si f est concave alors : $f[ta+(1-t)b] \geq tf(a) + (1-t)f(b)$.

Démonstration : Dans le cas où f est convexe.

Soit $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.

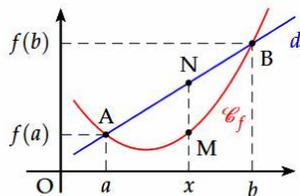
Soit $x \in [a; b]$, on pose $t = \frac{b-x}{b-a}$

on a alors $x = ta + (1-t)b$ avec $t \in [0; 1]$

On peut montrer alors que : $y_N = tf(a) + (1-t)f(b)$

Le point M est en dessous du point N donc $y_M < y_N$

$$f[ta+(1-t)b] \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$



4.3 Dérivée seconde

Définition 4 : Soit une fonction f deux fois dérivable sur I .

On appelle dérivée seconde de f , notée f'' , la fonction dérivée de f' : $f'' = (f')'$.

Remarque : Le signe de la dérivée seconde donne les variations de la fonction f' .

- Si $f'' > 0$ l'accroissement de f augmente avec x : cas de la fonction $x \mapsto e^x$.
- Si $f'' < 0$ l'accroissement de f diminue avec x : cas de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

En cinématique, la dérivée seconde de la loi horaire donne l'accélération.

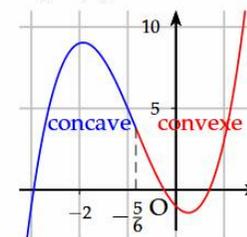
Exemple : Soit la fonction f définie que \mathbb{R} par : $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 1$.
 f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} : $f'(x) = 6x^2 + 10x - 3$ et $f''(x) = 12x + 10$

Théorème 8 : Soit f une fonction deux fois dérivable sur I .

- f est convexe sur I si, et seulement si, $f'' > 0$.
- f est concave sur I si, et seulement si, $f'' < 0$.

Exemple : Reprenons : $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 1$, on a : $f''(x) = 12x + 10$.

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{6}$
- Si $x > -\frac{5}{6} \Leftrightarrow f''(x) > 0$, la fonction f est convexe.
- Si $x < -\frac{5}{6} \Leftrightarrow f''(x) < 0$, la fonction f est concave.



Démonstration : Dans le cas où $f'' > 0$.

Soit $a \in I$, montrons que \mathcal{C}_f est au dessus de la tangente T_a en a .

$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$, posons $\varphi(x) = f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]$.

φ est dérivable sur I par opérations sur des fonctions dérivables.

$$\varphi(x) = f(x) - \underbrace{f'(a)x + af'(a) - f(a)}_{\text{constant}} \Rightarrow \varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$$

$f'' > 0$ donc la fonction f' est croissante sur I donc :

- Si $x > a \Rightarrow f'(x) > f'(a) \Rightarrow \varphi'(x) > 0$.
- Si $x < a \Rightarrow f'(x) < f'(a) \Rightarrow \varphi'(x) < 0$.
- $\varphi(a) = f(a) - f(a) = 0$

$\forall x \in I, \varphi(x) \geq 0$. La courbe \mathcal{C}_f est au dessus de T_a .

x	a
$\varphi'(x)$	- 0 +
$\varphi(x)$	↙ 0 ↘

Definition 5 : Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I de courbe représentative \mathcal{C}_f .
Soit A un point de \mathcal{C}_f de tangente T_a .

- On dit que \mathcal{C}_f admet un point d'inflexion en A si la tangente T_a traverse \mathcal{C}_f .
- Si $f''(a) = 0$ en changeant de signe alors \mathcal{C}_f admet un point d'inflexion en a .

Remarque : Le fait que la tangente T_a traverse la courbe \mathcal{C}_f cela signifie que T_a change de position par rapport à \mathcal{C}_f (au dessus puis en dessous ou inversement).

Si f'' change de signe en a alors f' ne change pas de signe en a .

