COURS : Les Suites (Généralités)

Table des matières

1 Suite : généralités

1.1 Définition

Définition 1 : Une suite (u_n) est une fonction définie de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$. À un rang donné n, on associe un nombre réel noté u_n.

$$\begin{aligned}(u_n) \quad : \quad \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ n &\longmapsto u_n\end{aligned}$$

Remarque :

- u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).
- Noter la différence entre la suite dans son ensemble notée (u_n) et le terme général noté u_n
- Si une suite est définie à partir du rang p, on peut noter $(u_n)_{n\geqslant p}$

1.2 Définir et programmer une suite

a) On peut définir une suite de **façon explicite** : $u_n = f(n)$

$$u_n = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sqrt{n-3} \quad n \geqslant 3$$

b) On peut aussi définir une suite de **façon récurrente** à un ou plusieurs termes :

- À un terme : $u_{n+1} = f(u_n)$

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}75u_n + 2 \end{cases}$$

$(u_n) : 4\,;\ 5\,;\ 5{,}75\,;\ 6{,}3125\,;\ldots$

n	5	10	20	30
u	7,050 8	7,774 7	7,987 3	7,999 9

(u_n) semble croissante et converger vers 8

Programme de (u_n) en langage naturel

Entrées et initialisation
Lire n
$4 \to u$
Traitement
pour i variant de 1 à n **faire**
$0{,}75u + 2 \to u$
fin
Sorties : Afficher u

Python : un programme **récursif** part de l'indice n puis descend progressivement l'indice jusqu'au premier terme. Un programme **itératif** part de l'indice du premier terme jusqu'à l'indice n.

⚠ range(1 , $n+1$) est l'ensemble des entiers naturels de 1 jusqu'à n

```
def u(n):
    if n==0:
        return 4
    return 0.75*u(n-1)+2
```

Programme récursif

```
def u(n):
    u=4
    for i in range(1,n+1):
        u=0.75*u+2
    return u
```

Programme itératif

- À deux termes : $u_{n+2} = f(u_{n+1}\,,\,u_n)$

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

$(u_n) : 1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5\,;\ 8\,;\ 13\,;\ldots$

N	10	15	20	30
V	89	987	10 946	1 346 269

Prgm : on introduit 3 variables u, v et w :
u et v pour la relation de récurrence et w pour ne pas écraser l'ancienne valeur de v que l'on affecte à u.

Programme de (u_n) en langage naturel

Entrées et initialisation
Lire n
$1 \to u$, $1 \to v$
Traitement
pour i variant de 2 à n **faire**
$u + v \to w$
$v \to u$
$w \to v$
fin
Sorties : Afficher v

Python :

```
def u(n):
    if n==0:
        return 1
    elif n==1:
        return 1
    return u(n-1)+u(n-2)
```

Programme récursif

```
def u(n):
    u=1
    v=1
    for i in range(2,n+1):
        w=u+v
        u=v
        w=v
    return u(n-1)+u(n-2)
```

Programme itératif

On peut encore définir une suite par l'intermédiaire d'une autre suite ou par une somme de termes, à l'aide d'une intégrale, etc...

1.3 Variation ou monotonie d'une suite

Définition 2 : Soit (u_n) une suite numérique. On dit que :

- la suite (u_n) est strictement **croissante** (à partir d'un certain rang k) lorsque
$$u_{n+1} > u_n \quad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant k$$
- la suite (u_n) est strictement **décroissante** (à partir d'un certain rang k) lorsque
$$u_{n+1} < u_n \quad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant k$$
- la suite (u_n) est **monotone** (à partir d'un certain rang k) si elle est croissante ou décroissante à partir d'un certain rang k

1.4 Comment montrer la monotonie d'une suite

Règle 1 : Pour montrer la monotonie d'une suite (u_n),

- On étudie le signe de la quantité $u_{n+1} - u_n$. (cas le plus fréquent)
  si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$ alors, (u_n) est croissante
  si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$ alors, (u_n) est décroissante.
- Si les termes u_n sont strictement positifs, on compare la quantité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1
  si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors, (u_n) est croissante
  si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors, (u_n) est décroissante
- Si $u_n = f(n)$, on étudie les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.
- Si $u_n = f(u_n)$, on peut utiliser un raisonnement par récurrence. (cf chapitre 2)

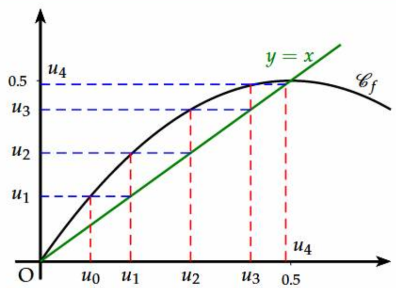
Exemples :

- Montrer que la suite (u_n) définie pour tout n par : $u_n = n^2 - n$ est croissante.
  Étudions le signe de la quantité : $u_{n+1} - u_n$
  $$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n$$
  $\forall n \in \mathbb{N},\ 2n \geqslant 0 \ \Rightarrow \ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suite (u_n) est croissante.
- Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ est croissante.
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{2^n}{n} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1}$$
  $$n \geqslant 1 \overset{+n}{\Leftrightarrow} 2n \geqslant n+1 \overset{\div(n+1)}{\Leftrightarrow} \frac{2n}{n+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$
  $\forall n \geqslant 1 \ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.
- Montrer que la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 2$ par : $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$ est décroissante.
  On étudie la fonction associée f définie sur $I = [2; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.
  Cette fonction est dérivable sur I, donc
  $$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$$
  La fonction f est donc décroissante sur I, donc la suite (u_n) est décroissante

1.5 Visualisation d'une suite

Propriété 1 : Pour visualiser une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, il suffit de tracer la courbe de la fonction associée f et la droite $y = x$. La droite sert à reporter les termes de la suite sur l'axe des abscisses.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 0,1 \\ u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n) \end{cases}$$
On obtient alors le graphe suivant, après avoir tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie par :
$$f(x) = 2x(1-x)$$

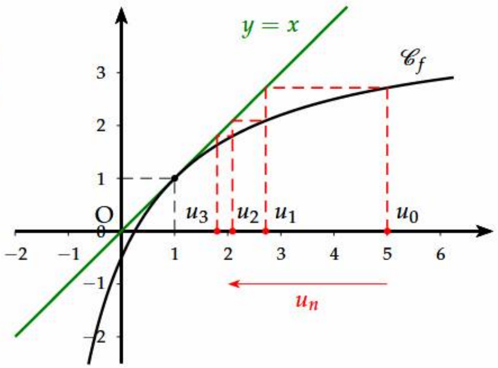


Exemple : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$

f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$.

Après avoir tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et la droite d'équation $y = x$, placer u_0 sur l'axe des abscisses, construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

D'après le graphique, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle semble converger vers 1 qui est l'abscisse du point d'intersection entre la droite $y = x$ et la courbe $\mathscr{C}_f$.



, sélectionner le mode "Suite" et le format "'Toile". Rentrer la suite, régler la fenêtre, appuyer sur "graphe" puis sur "trace". À l'aide de la flèche de droite obtenir les différents termes.

2 Suite arithmétique (rappels)

2.1 Définition

Définition 3 : Une suite arithmétique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$ $\quad r$ étant la raison de la suite

Remarque : Une suite arithmétique correspond à une progression linéaire

Exemple : $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ $\qquad (u_n) : 2;\ 5;\ 8;\ 11;\ 14;\ 17;\ldots$

2.2 Comment la reconnaît-on ?

Théorème 1 : Une suite (u_n) est arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs est constante. Cette constante est alors la raison.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = r \quad \Leftrightarrow \quad (u_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } r$$

Exemple : Soit (u_n) définie par $u_n = 4n - 1$. Montrer que (u_n) est arithmétique.
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 4(n+1) - 1 - (4n-1) = 4$, donc (u_n) est arithmétique.

2.3 Expression du terme général en fonction de n

Règle 2 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r

- Si le premier terme est u_0, alors : $u_n = u_0 + nr$
- Si le premier terme est u_p, alors : $u_n = u_p + (n-p)r$

2.4 Somme des premiers termes

Théorème 2 : D'une façon générale, la somme des premiers termes d'une suite arithmétique obéit à :

$$S_n = \text{Nbre de termes} \times \frac{\Sigma \text{ termes extrêmes}}{2}$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \quad \Leftrightarrow \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad \Leftrightarrow \quad S_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

Exemple : Calculer $S = 8 + 13 + 18 + \cdots + 2013 + 2018$

S est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 5 et de termes extrêmes 8 et 2018.
Le nbre de termes est : $\dfrac{2018-8}{5} + 1 = 403$. (Règle des piquets et des intervalles)

$$S = 403 \times \frac{8 + 2018}{2} = 408\,239$$

Python Vérification

Soit le programme suivant permettant de calculer S.
Comme la suite arithmétique est croissante, on peut proposer la boucle conditionnelle de condition $u < 2018$ et non $u \leqslant 2018$ car la dernière boucle se fait avec $u = 2013$ et l'on calcule encore un terme $u = 2018$ que l'on ajoute à la somme S.
On retrouve bien le résultat calculé.

```
def s():
    u=8
    s=8
    while u<2018:
        u=u+5
        s=s+u
    return s
```

3 Suite géométrique (rappels)

3.1 Définition

Définition 4 : Une suite géométrique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$ q étant la raison de la suite

Remarque : Une suite géométrique correspond à une progression exponentielle.

Exemple : $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$ $(u_n) : 3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48;\ 96;\ldots$

3.2 Comment la reconnaît-on ?

Théorème 3 : Une suite (u_n) de termes non nul, est géométrique si le quotient entre deux termes consécutifs est constant. Cette constante est alors la raison.

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \iff (u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q$$

Exemple : Soit la suite $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$

On pose la suite $v_n = u_n - 1$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 3u_n - 2 - 1 = 3(u_n - 1) = 3v_n \quad \text{donc } \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{v_{n+1}}{v_n} = 3$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 4$.

3.3 Expression du terme général en fonction de n

Règle 3 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q

- Si le premier terme est u_0, alors : $u_n = q^n \times u_0$
- Si le premier terme est u_p, alors : $u_n = q^{n-p} \times u_p$

3.4 Somme des premiers termes

Théorème 4 : D'une façon générale, la somme des premiers termes d'une suite géométrique ($q \neq 1$) obéit à :

$$S_n = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nbre termes}}}{1 - q}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad \Leftrightarrow \quad S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple : Calculer la somme des termes suivants :

$$S = 0,02 - 0,1 + 0,5 - 2,5 + \cdots + 312,5$$

Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique (u_n) de raison $q = -5$ de premier terme $u_0 = 0,02$.

On doit avoir : $u_n = 0,02(-5)^n = 312,5 \Rightarrow (-5)^n = \dfrac{312,5}{0,02} = 15\,625 = 5^6$.

Il y a alors 7 termes. $S = 0,02 \times \dfrac{1 - (-5)^7}{1 - (-5)} = \dfrac{5^7 + 1}{300} = 260,42$

3.5 Limite d'une suite géométrique

Théorème 5 : Soit une suite (u_n) définie par : $u_n = q^n$ (avec $q \in \mathbb{R}$)

- Si $q > 1$ alors (u_n) est divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors (u_n) est constante (donc convergente vers 1)
- Si $-1 < q < 1$ alors (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$ alors (u_n) est divergente et n'a pas de limite