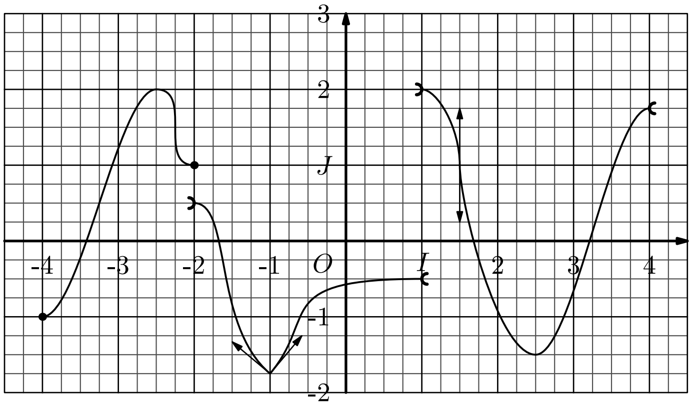
Exercice 1

Ci-dessous est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ; cette courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse 1,5 :



1. Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Déterminer graphiquement l'ensemble de dérivabilité de la fonction f.

3. Déterminer les limites suivantes :

   a. $\lim\limits_{x\mapsto -2^-} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\mapsto -2^+} f(x)$

   c. $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} f(x)$ d. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} f(x)$

4. a. Combien existe-t-il de nombres a tels que :
   $\lim\limits_{x\mapsto a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\mapsto a^+} f(x)$

   b. Quelle particularité graphique ont les points d'abscisse a vérifiant une telle condition?

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par la relation :
$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

1. Justifier que la fonction f n'est pas continue en 0.

2. Déterminer les deux limites suivantes :
   $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0^- \\ x\neq 0}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0^+ \\ x\neq 0}} f(x)$

Exercice 3*

On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{3x-1}{6x^2-11x+3}$$

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de la fonction f.

2. Est-il possible de **prolonger par continuité** la fonction f en $\frac{1}{3}$ afin qu'elle soit continue en cette valeur? C'est à dire existe-t-il un nombre a telle que la fonction g suivante soit continue en $\frac{1}{3}$:
$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{3x-1}{6x^2-11x+3} & \text{pour } x\in\mathcal{D}_f \\ g\left(\dfrac{1}{3}\right) = a & \text{pour } x=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Exercice 4

1. On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

   b. Déterminer la valeur des deux limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x)$

   c. Peut-on dire que la fonction f est continue en 0?

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{pour } x\neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$
   Justifier que la fonction g est continue en 0.

Exercice 5

On considère une fonction f qui admet le tableau de variations suivant :

x	-5		1		5		10^3
Variation de f	4	↘	-6	↗	-1 ‖ 5	↘	-13

1. Justifier que la fonction f s'annule deux fois sur son ensemble de définition.

2. Soit m un nombre réel. Discuter en fonction de la valeur de m du nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

Exercice 6*

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ admettant le tableau de variations suivant :

x	-4		2		4
Variation de f	3	↘	$-\frac{9}{2}$	↗	-1

1. Justifier que la fonction f s'annule une unique fois sur son ensemble de définition.

2. Soit m un nombre réel. Discuter en fonction de la valeur de m du nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

Exercice 7*

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

1. Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :
$$f'(x) = -\frac{1}{x^4}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot(2\cdot x+1)$$

2. Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3. Démontrer que l'équation $f(x)=2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

Exercice 8*

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$g(x) = x(e^x - e) + e - 2$

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$. Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$g''(x) = (2+x)e^x$
2. En déduire les variations de la fonction g' sur $[0\,;+\infty[$.
3. Etablir que l'équation $g'(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. En déduire les variations de la fonction g sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 9*

Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation :
(E) : $e^{2x} + 4{\cdot}x{\cdot}e^x - 4{\cdot}e^x - 4 = 0$

Pour cela, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = e^{2x} + 4{\cdot}x{\cdot}e^x - 4{\cdot}e^x - 4$.

1. Montrer que pour tout x appartenant à $]-\infty\,;0[$:
$e^{2x} - 4 < 0 \quad ; \quad 4{\cdot}e^x(x-1) < 0$
2. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,;0[$.
3. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$
4. Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

   On note α cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a.

Exercice 10*

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x{\cdot}e^{x-1} + 1$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
Que peut-on déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout réel x : $f'(x)=(x+1){\cdot}e^{x-1}$
4. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.
Donner une équation de T_a.
2. Démontrer qu'une tangente à $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si, et seulement si, a vérifie l'égalité :
$1 - a^2{\cdot}e^{a-1} = 0$
3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ de l'équation.
$1 - x^2{\cdot}e^{x-1} = 0$
4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Exercice 11

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}-1}{x+1}$$
Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
   b. Déterminer les limites de la fonction f en ses bornes.
   c. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des asymptotes? Si oui, préciser lesquelles.
2. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
3. a. Justifier que la fonction f ne s'annule qu'une fois sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
   b. Tracer la courbe représentative de la fonction f à l'aide de votre calculatrice ; utiliser les fonctions de votre calculatrice pour déterminer une valeur approchée de ce zéro de la fonction f.

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x^2+1}$$

1. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f, ainsi que celle de la dérivée seconde f''.
2. a. Etudier le signe de la fonction f''.
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f'.
   (Une valeur approchée des extrémums sera cherchée à l'aide de la calculatrice)
3. a. Montrer que la fonction f' s'annule pour $x=1$ et aussi en un nombre α vérifiant l'encadrement :
   $0{,}2 < \alpha < 0{,}3$
   b. En déduire le tableau de signes de la fonction f'.
4. a. Déterminer la valeur des deux limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x) \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   (Une valeur approchée des extrémums sera cherchée à l'aide de la calculatrice)

Exercice 13*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = 5x - \frac{1}{x^2+x+1}$$

1. a. Montrer que la fonction f admet pour dérivée seconde, la fonction f'' définie par :
$$f''(x) = \frac{-6x\cdot(x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^3}$$
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction f''.
2. a. Déduire de la question 1., le tableau de variations de la fonction f'.
   b. Justifier que la fonction f' est positive sur $\mathbb{R}$.
3. Justifier que la fonction f admet un unique zéro sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre réel x est définie par l'expression :

$$f(x) = 3\cdot\sqrt{x^2+1} - 2\cdot x$$

Le but de l'exercice est de montrer que la fonction f admet un maximum global et d'obtenir une valeur approchée.

1. a. Montrer que la dérivée seconde de la fonction f admet pour expression :
$$f''(x) = \frac{3}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$$
   b. Etablir les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} f'(x) = -5 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f'(x) = 1$$
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f'.
2. a. Justifier que la fonction f' s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$.
   b. On note α l'unique solution de l'équation : $f'(x)=0$. Justifier brièvement que le nombre α appartient à l'intervalle $\big[0{,}8\,;0{,}9\big]$.
3. a. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.
   b. Justifier que la fonction f admet un minimum global qui est atteint pour $x=\alpha$.

Exercice 15

Soit g la fonction définie sur $\big[0\,;+\infty\big[$ par :

$$g(x) = x\cdot\left(e^x - e\right) + e - 2$$

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $\big[0\,;+\infty\big[$.
Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $\big[0\,+\infty\big[$ par :
$$g''(x) = (2+x)e^x$$
2. En déduire les variations de la fonction g' sur $\big[0\,;+\infty\big[$.
3. Etablir que l'équation $g'(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. En déduire les variations de la fonction g sur $\big[0\,;+\infty\big[$.

Exercice 16*

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = e^x - x\cdot e^x + 1.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Etudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. a. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $\big[0\,;+\infty\big[$ une unique solution. On note α cette solution.
   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   c. Démontrer que : $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}$
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

Soit A la fonction définie et dérivable sur $\big[0\,;+\infty\big[$ telle que :

$$A(x) = \frac{4x}{e^x+1}$$

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$ où g est la fonction définie dans la partie **A**.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $\big[0\,;+\infty\big[$.

Exercice 17

1. On considère la fonction polynôme P définie pour tout réel x par :
$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$
   a. Etudier les variations de P.
   b. Montrer que l'équation $P(x)=0$ admet une racine réelle et une seule, α, et que α appartient à l'intervalle $\big]1{,}6\,;1{,}7\big[$
2. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des réels strictement supérieurs à -1.
On considère la fonction numérique f définie sur $\mathcal{D}$ par :
$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$
On désigne par $\left(\mathscr{C}\right)$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à une repère orthonormé *(on prendra comme unité 4 cm)*.
   a. Etudier les variations de f *(on utilisera pour cela les résultats du 1.)*.
   b. Ecrire une équation de la droite (Δ) tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0. Etudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (Δ) dans l'intervalle $\big]-1\,;1\big[$.
   c. Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.
Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (Δ) et la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.

Exercice 18*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - \sqrt{1+2\cdot x^2}$$

1. Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = 3\cdot x\cdot\sqrt{2x^2+1} - 2$$

a. Justifier que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$. De plus, justifier que : $0{,}5<\alpha<0{,}6$.

c. Dresser le tableau de signes de la fonction g.

3. a. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

b. Dresser le tableau de signes de f'.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f. *(on utilisera des valeurs approchées obtenues à l'aide de la calculatrice).*

Exercice 19

1. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = -8x^3 + 4x - 4$

a. Dresser le tableau de variations de la fonction g. *(on utilisera des valeurs approchées pour compléter le tableau)*

b. En observant que $g(-1)=0$, dresser le tableau de signes de la fonction g.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{2x^2+1}{\left(2x^2+2x+3\right)^2}$$

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

b. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c. Etablir que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est donnée par la relation :
$$f'(x) = \frac{-8x^3+4x-4}{(2x^2+2x+3)^3}$$

d. Dresser le tableau de variations de la fonction f. *(on utilisera des valeurs approchées pour compléter le tableau)*

e. En déduire le tableau de signes de la fonction f.

Exercice 20

On considère la fonction f définie par :
$f(x) = x^3 + 3{\cdot}x$

1. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b. Justifier que le nombre 5 admet un unique antécédent par la fonction f ; on notera α ce nombre.

2. On pose pour valeur $a_0=0$ et $b_0=2$. On souhaite construire par la méthode de dichotomie les deux suites (a_n) et (b_n) adjacentes et convergentes vers α.

a. Compléter le tableau ci-dessous :

	a_n	c_n	b_n	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(b_n)$
$n=0$						
$n=1$						
$n=2$						
$n=3$						
$n=4$						
$n=5$						

b. Avec quelle précision obtient-on la valeur de α à l'aide du tableau.

