Correction 1

1. L'ensemble de définition de la fonction f est :
$\mathcal{D}_f = [-4\,;4[\backslash\{1\}$

2. L'ensemble de dérivabilité de la fonction f est l'ensemble :
$\mathcal{D}'_f = [-4\,;4[\backslash\left\{-2\,;-1\,;1\,;\dfrac{3}{2}\right\}$

3. Graphiquement, on a les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -2^-} f(x) = 1$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -2^+} f(x) = \frac{1}{2}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^-} f(x) = -\frac{1}{2}$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^+} f(x) = 2$

4. a. Il existe deux nombres a, -2 et 1, tels que :
$\displaystyle\lim_{x\mapsto a^-} f(x) \neq \lim_{x\mapsto a^+} f(x)$

b. Graphiquement au point d'abscisse a vérifiant la condition précédente, la courbe présente une "*coupure*" ; elle ne peut être tracé d'un seul coup de crayon : on dira que la courbe n'est pas continue en ce point.

Correction 2

1. L'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}^*$; une première raison pour laquelle la fonction h ne peut être continue en 0, c'est qu'elle n'est pas définie en 0.

2. Etudions les deux limites suivantes :
$\displaystyle\lim_{\substack{x\mapsto 0^-\\x\neq 0}} f(x)\quad;\quad \lim_{\substack{x\mapsto 0^+\\x\neq 0}} f(x)$

- Pour $x\in\mathbb{R}_*^-$, on a l'écriture :
$f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$
On en déduit la valeur de la limite suivante :
$\displaystyle\lim_{\substack{x\mapsto 0^-\\x\neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\mapsto 0^-\\x\neq 0}} -1 = -1$

- Pour $x\in\mathbb{R}_*^+$, on a l'écriture :
$f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$
On en déduit la valeur de la limite suivante :
$\displaystyle\lim_{\substack{x\mapsto 0^+\\x\neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\mapsto 0^+\\x\neq 0}} 1 = 1$

Correction 3

1. La fonction f est définie par un quotient ; déterminons les valeurs pour lesquelles le dénominateur s'annule.

Ce polynôme du second degré a pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-11)^2 - 4{\times}6{\times}3 = 121 - 72 = 49.$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Ainsi, ce polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-11)-7}{2{\times}6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-11)+7}{2{\times}6} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Ainsi, la fonction admet pour ensemble de définition l'ensemble :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\,;\frac{3}{2}\right\}$$

2. Etudions la valeur des deux limites suivantes :
$\displaystyle\lim_{\substack{x\mapsto \frac{1}{3}^-\\x\neq\frac{1}{3}}} g(x)\quad;\quad \lim_{\substack{x\mapsto \frac{1}{3}^-\\x\neq\frac{1}{3}}} g(x)$

Utilisons d'abord la transformation algébrique suivante pour $x\in\mathcal{D}_f$:

$$g(x) = f(x) = \frac{3x-1}{6x^2-11x+3}$$

Factorisons le dénominateur :

$$= \frac{3x-1}{6\Big(x-\dfrac{1}{3}\Big)\Big(x-\dfrac{3}{2}\Big)} = \frac{3x-1}{(3x-1)(2x-3)} = \frac{1}{2x-3}$$

Ainsi, on a les deux limites suivantes :

- $$\lim_{\substack{x\mapsto \frac{1}{3}^-\\x\neq\frac{1}{3}}} g(x) = \lim_{\substack{x\mapsto \frac{1}{3}^-\\x\neq\frac{1}{3}}} \frac{1}{2x-3} = \lim_{\substack{x\mapsto \frac{1}{3}^-\\x\neq\frac{1}{3}}} \frac{1}{2{\times}\dfrac{1}{3}-3}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{2}{3}-3} = \frac{1}{\dfrac{-7}{3}} = -\frac{3}{7}$$

- $$\lim_{\substack{x\mapsto \frac{1}{3}^+\\x\neq\frac{1}{3}}} g(x) = \lim_{\substack{x\mapsto \frac{1}{3}^-\\x\neq\frac{1}{3}}} \frac{1}{2x-3} = \lim_{\substack{x\mapsto \frac{1}{3}^+\\x\neq\frac{1}{3}}} \frac{1}{2{\times}\dfrac{1}{3}-3}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{2}{3}-3} = \frac{1}{\dfrac{-7}{3}} = -\frac{3}{7}$$

En posant $a = -\dfrac{7}{3}$, on obtient l'égalité suivante :

$$\lim_{\substack{x\mapsto \frac{1}{3}^-\\x\neq\frac{1}{3}}} f(x) = \lim_{\substack{x\mapsto \frac{1}{3}^+\\x\neq\frac{1}{3}}} f(x) = f\Big(\frac{1}{3}\Big) = -\frac{7}{3}$$

Ainsi, la fonction g est continue en $\dfrac{1}{3}$.

Correction 4

1. a. L'expression placée sous le radical est toujours positive ; ainsi, la racine carrée est définie pour toute valeur réelle de x.

Pour que le quotient soit défini, il est nécessaire que son dénominateur soit non nul ; ainsi, l'image de 0 par la fonction f n'est pas définie.

Ainsi, l'ensemble de définition de la fonction f est :
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

b. Le facteur $\sqrt{x^2+1}+1$ est non-nul. On a les transformations algébriques suivantes :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{\big(\sqrt{x^2+1}-1\big){\cdot}\big(\sqrt{x^2+1}+1\big)}{x{\cdot}\big(\sqrt{x^2+1}+1\big)}$$
$$= \frac{x^2+1-1^2}{x{\cdot}\big(\sqrt{x^2+1}+1\big)} = \frac{x^2}{x{\cdot}\big(\sqrt{x^2+1}+1\big)}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

Ainsi, on a les deux limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^-} f(x) = \lim_{x\mapsto 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = 0$

- $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = \lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = 0$

c. La fonction n'est pas continue en 0 car elle n'est pas définie en 0.

2. La fonction g vérifie les trois conditions suivantes :

- Sur $\mathbb{R}_-^*$, on a l'égalité $g(x)=f(x)$; ainsi, on a la limite :
$\lim_{x\mapsto 0^-} g(x) = \lim_{x\mapsto 0^-} f(x) = 0$
- Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a l'égalité $g(x)=f(x)$; ainsi, on a la limite :
$\lim_{x\mapsto 0^+} g(x) = \lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = 0$
- Pour $x=0$ et par définition, on a : $g(0)=0$

Correction 5

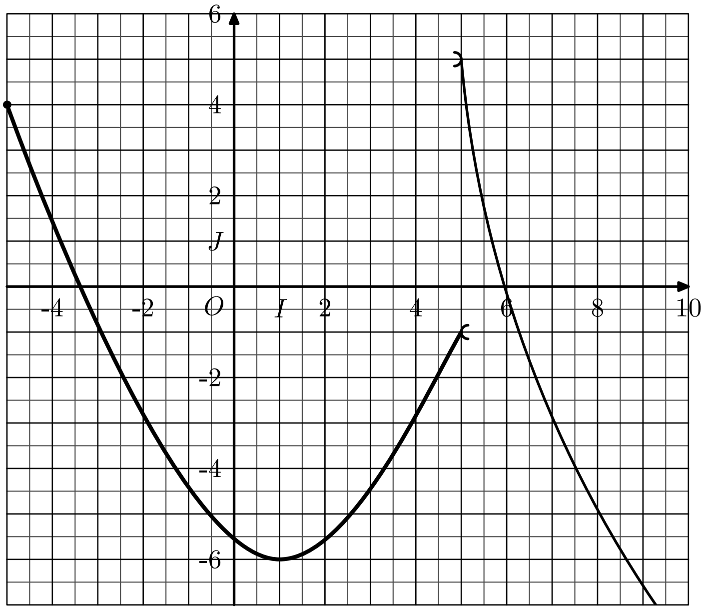
1. - Sur l'intervalle $[-5\,;1]$.
On remarque que : $f(-5) = 4$; $f(1) = -6$
On a :
   - ⇨ la fonction f est continue sur $[-5\,;1]$.
   - ⇨ la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-5\,;1]$.
   - ⇨ le nombre 0 est compris entre les images des bornes de l'intervalle $[-5\,;1]$.

   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha\in[-5\,;1]$ tel que :
$f(\alpha) = 0$
   - Sur l'intervalle $[1\,;5[$:
D'après le tableau de variation, la fonction f admet le nombre -1 pour majorant sur l'intervalle $[1\,;5[$: la fonction f ne s'annule pas sur cet intervalle.
   - Sur l'intervalle $]5\,;10^3]$:
On remarque : $\lim_{x\mapsto 5^+} f(x) = 5$; $f(10^3) = -13$
   - ⇨ la fonction f est continue sur l'intervalle $]5\,;10^3]$
   - ⇨ la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]5\,;10^3]$.
   - ⇨ le nombre 0 est compris entre les limites aux bornes de l'intervalle $]5\,;10^3]$.

   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel β sur l'intervalle $]5\,;\,10^3]$ tel que :
$f(\beta) = 0$

   On vient de montrer que la fonction f admet deux antécédents du nombre 0 sur son ensemble de définition.

2. Voici une représentation possible de la fonction f :



Voici un résumé sur le nombre d'éléments vérifiant la relation $f(x)=m$ en fonction de la valeur de m :

- $m\in]-\infty\,;-13[$: aucun antécédent ;
- $m\in[-13\,;-6[$: 1 antécédent ;
- $m\in\{-6\}$: 2 antécédents ;
- $m\in]-6\,;-1[$: 3 antécédents ;
- $m\in[-1\,;4]$: 2 antécédents ;
- $m\in]4\,;5[$: 1 antécédents ;
- $m\in[5\,;+\infty[$: aucun anntécédent.

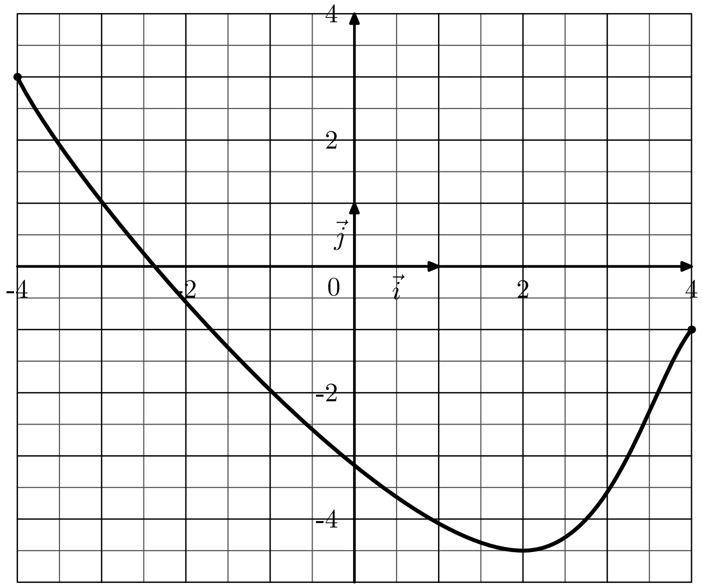
Correction 6

1. - Sur l'intervalle $[-4\,;2]$:
On remarque : $f(-4) = 3$; $f(2) = -4{,}5$
On a :
   - ⇨ la fonction f est continue sur l'intervalle $[-4\,;2]$
   - ⇨ la fonction f est strictement décroissante sur l'ensemble $[-4\,;2]$
   - ⇨ le nombre 0 est compris entre les images aux bornes de l'intervalle $[-4\,;\,2]$.

   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha\in[-4\,;2]$ tel que :
$f(\alpha) = 0$
   - Sur l'intervalle $[2\,;4[$:
D'après le tableau de variation, la fonction f admet le nombre -1 pour majorant sur l'intervalle $[2\,;4]$: la fonction f ne peut pas s'annuler sur cet intervalle.

   On vient donc de montrer que la fonction f ne s'annule qu'une seule fois sur l'intervalle $[-4\,;4]$.

2. Voici une représentation possible de la fonction f :



Voici un résumé sur le nombre d'éléments vérifiant la relation $f(x)=m$ en fonction de la valeur de m :

- $m\in\left]-\infty\,;-\dfrac{9}{2}\right[$: aucun antécédent ;
- $m=-\dfrac{9}{2}$: un antécédent ;
- $m\in\left]-\dfrac{9}{2}\,;-1\right]$: deux antécédent ;
- $m\in\left]-1\,;3\right]$: un antécédent ;
- $m\in\left]3\,;+\infty\right[$: aucun antécédent.

Correction 7

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :

$u(x)=\dfrac{1}{x^2}$; $v(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$
$$=\left[-\frac{2x}{\left(x^2\right)^2}\right]\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$$
$$=-\frac{2x}{x^4}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^4}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=-\frac{2x+1}{x^4}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x^4}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\left(2x+1\right)$$

2. On a le tableau de signes suivant :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$-\dfrac{1}{x^4}$	$-$
$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$	$+$
$2x+1$	$+$
$f'(x)$	$-$

- On a les deux limites :
  $\lim\limits_{x\mapsto0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto+0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty$
  On en déduit la limite :
  $\lim\limits_{x\mapsto0^+}f(x)=\lim\limits_{x\mapsto0^+}\dfrac{1}{x^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty$
- On a les deux limites :
  $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$
  On en déduit la limite :
  $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{1}{x^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$

Ainsi, on a le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	0

3. On a les deux limites suivantes :

$\lim\limits_{x\mapsto0^+}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)=0$

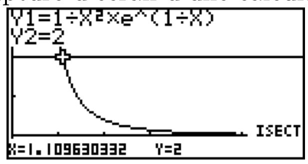
De plus :

- la fonction est continue sur $\left]0\,;+\infty\right[$
- la fonction est strictement décroissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$
- le nombre 2 est compris entre les limites par la fonction f aux bornes de l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique nombre α solution de l'équation :

$f(x)=2$

Voici une capture d'écran d'une calculatrice :



On obtient la valeur approchée : $\alpha\approx1{,}11$

Correction 8

1. La fonction g admet une expression de la forme :

$g(x)=u(x)\cdot v(x)+e-2$

où les fonctions u et v sont définies par :

$u(x)=x$; $v(x)=\mathrm{e}^x-e$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x)=1$; $v'(x)=\mathrm{e}^x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g' :

$$g'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)+0-0$$
$$=1\cdot\left(\mathrm{e}^x-e\right)+x\cdot\mathrm{e}^x=x\cdot\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-e$$
$$=\mathrm{e}^x\cdot\left(x+1\right)-e$$

L'expression de la fonction g' est donnée sous la forme :

$g'(x)=u(x)\cdot v(x)-e$

où les fonctions u et v sont définies par :

$u(x)=\mathrm{e}^x$; $v(x)=x+1$

et qui admetent pour dérivée :

$u'(x)=\mathrm{e}^x$; $v'(x)=1$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g'' :

$$g''(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)+0$$
$$=\mathrm{e}^x\cdot\left(x+1\right)+\mathrm{e}^x\times1=\mathrm{e}^x\cdot\left(x+1+1\right)=\mathrm{e}^x\cdot\left(x+2\right)$$

2. Sur $\left[0\,;+\infty\right[$, les deux facteurs définissant l'expression de g'' étant strictement positif, on en déduit que la fonction g'' est strictement positive.
Ainsi, la fonction g' est strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

3. Déterminons par la fonction g les images et les limites aux bornes de l'ensemble $\left[0\,;+\infty\right[$:

- $g'(0)=\mathrm{e}^0\cdot\left(0+1\right)-e=1-e<0$

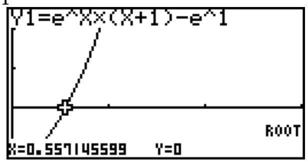
- Des deux limites :
$\lim_{x\mapsto+\infty} e^x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} x+1 = +\infty$
On en déduit la limite :
$\lim_{x\mapsto+\infty} g'(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} e^x\cdot(x+1) - e = +\infty$

De plus :

- la fonction g' est continue sur $[0\,;+\infty[$.
- la fonction g' est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
- le nombre 0 est compris entre les limites de la fonction g' des bornes de l'intervalle $[0\,;+\infty[$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un uinique nombre α appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ solution de l'équation :
$g(\alpha) = 0$

Voici une capture d'écran de la calculatrice :



4. La fonction g' étant strictement croissante et s'annulant en α, on en déduit son signe sur $[0\,;+\infty[$:
- g' est négative sur $[0\,;\alpha]$;
- g' est positive sur $[\alpha\,;+\infty[$

Ainsi, on obtient les variations de la fonction g :
- g est croissante sur $[0\,;\alpha[$;
- g est décroissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.

Correction 9

1. - Pour tout x appartenant à $]-\infty\,;0[$, on a :
$2x < 0$
La fonction exponentielle est strictement croissante
$$e^{2x} < e^0$$
$$e^{2x} < 1$$
$$e^{2x} - 4 < 1 - 4$$
$$e^{2x} - 4 < -3$$
$$e^{2x} - 4 < 0$$
- Pour tout $x\in]-\infty\,;0[$, on a $x-1<0$; sachant que la fonction exponentielle est strictement croissante, on en déduit que le produit suivant est négatif sur $\mathbb{R}_-^*$:
$4\cdot e^x\cdot(x-1) < 0$

2. On a la transformation suivante :
$$f(x) = e^{2x} + 4\cdot x\cdot e^x - 4\cdot e^x - 4$$
$$= \left(e^{2x} - 4\right) + 4\cdot e^x\cdot(x-1)$$
Or, d'après la question précédente :
$$= \underbrace{\left(e^{2x}-4\right)}_{<0} + \underbrace{4\cdot e^x\cdot(x-1)}_{<0} < 0$$

3. La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$$f'(x) = 2\cdot e^{2x} + \left(4e^x + 4\cdot x\cdot e^x\right) - 4e^x - 0$$
$$= 2\cdot e^{2x} + 4\cdot x\cdot e^x$$
Chacun des termes de cette somme est strictement positif sur $]0\,;+\infty[$: on en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$: on en déduit que la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

4. Remarquons que :
- En 0, la fonction f prend la valeur :
$$f(0) = e^{2\cdot 0} + 4\times 0\times e^0 - 4\times e^0 - 4$$
$$= 1 + 0 - 4 - 4 = -7$$
- La transformation algébrique suivante :
$$f(x) = e^{2x} + 4\cdot x\cdot e^x - 4\cdot e^x - 4$$
$$= e^{2x} + e^x\cdot\left(4x - 4 - 4\cdot e^{-x}\right)$$
On obtient les deux limites suivantes :
$\lim_{x\mapsto+\infty} e^{2x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} 4x - 4 - 4\cdot e^{-x} = +\infty$
qui permettent d'obtenir la limite suivante :
$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$

De plus :
- la fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$
- la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$
- le nombre 0 est compris entre les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de l'équation :
$(E) :\ f(x) = 0$

D'après la calculatrice, on obtient l'encadrement :
$0{,}84 < \alpha < 0{,}85$

Correction 10

Partie A

1. Pour $x\neq 0$ et $x\neq 1$, on a la transformation algébrique suivante :
$$f(x) = x\cdot e^{x-1} + 1 = \left[\frac{x}{x-1}\cdot(x-1)\right]\cdot e^{x-1} + 1$$
$$= \frac{x}{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}\cdot(x-1)\cdot e^{x-1} + 1 = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(x-1)\cdot e^{x-1} + 1$$
On a la limite : $\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$
De plus, lorsque x tend vers $-\infty$, $x-1$ tend vers $-\infty$; on en déduit la limite suivante :
$\lim_{x\mapsto-\infty} (x-1)\cdot e^{x-1} = 0$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto-\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(x-1)\cdot e^{x-1} + 1 = 0 + 1 = 1$$
La courbe $\mathscr{C}$ admet la droite $y=1$ comme asymptote horizontale en $-\infty$.

2. On a les deux limites suivantes :
$\lim_{x\mapsto+\infty} x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} e^{x-1} = +\infty$
On en déduit la limite suivante :
$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} x\cdot e^{x-1} + 1 = +\infty$

3. Notons u et v les deux fonctions définies par :
$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = e^{x-1}$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = e^{x-1}$
Ainsi, la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) + 0$$
$$= 1\cdot e^{x-1} + x\cdot e^{x-1} = (1+x)\cdot e^{x-1}$$

4. La fonction exponentielle étant strictement posive, on en déduit le tableau de signes de la fonction f puis le

tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de f'		$-$	0	$+$	
Variation de f	1	$\searrow$	$1-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. Pour la valeur a, on a les deux valeurs :
$f(a)=a{\cdot}e^{a-1}+1 \quad ; \quad f'(a)=(a+1){\cdot}e^{a-1}$

Ainsi, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a a pour équation :
$y=f'(a){\cdot}(x-a)+f(a)$
$y=(a+1){\cdot}e^{a-1}{\cdot}(x-a)+a{\cdot}e^{a-1}+1$
$y=(a+1){\cdot}e^{a-1}{\cdot}x-(a+1){\cdot}e^{a-1}{\cdot}a+a{\cdot}e^{a-1}+1$
$y=\big[(a+1){\cdot}e^{a-1}\big]{\cdot}x+\Big[1+a{\cdot}e^{a-1}{\cdot}\big[-(a+1)+1\big]\Big]$
$y=\big[(a+1){\cdot}e^{a-1}\big]{\cdot}x+\Big[1+a{\cdot}e^{a-1}{\cdot}(-a)\Big]$
$y=\big[(a+1){\cdot}e^{a-1}\big]{\cdot}x+\big(1-a^2{\cdot}e^{a-1}\big)$

2. D'après le résultat de la question précédente, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse a strictement positif a pour ordonnée à l'origine :
$1-a^2{\cdot}e^{a-1}$
Ainsi, cette tangente passe par l'origine si, et seulement si, ce terme est nul ; c'est à dire :
$1-a^2{\cdot}e^{a-1}=0$

3. Considérons la fonction g dont l'image d'un nombre x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est définie par la relation :
$g(x)=1-x^2{\cdot}e^{x-1}$

Considérons les deux fonctions u et v définies par :
$u(x)=-x^2 \quad ; \quad v(x)=e^{x-1}$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x)=-2x \quad ; \quad v'(x)=e^{x-1}$

Ainsi, la fonction g admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est donnée par :
$g'(x)=0+u'(x){\cdot}v(x)-u(x){\cdot}v'(x)$
$\quad=-2x{\cdot}e^{x-1}+(-x^2){\cdot}e^{x-1}$
$\quad=(-x^2-2x){\cdot}e^{x-1}=-x{\cdot}(x+2){\cdot}e^{x-1}$

On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
e^{x-1}		$+$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a les deux valeurs particulières pour la fonction g :

- $g(0)=1-0^2{\times}e^{0-1}=1$
- On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x^2=+\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty}e^{x-1}=+\infty$

On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}1-x^2{\cdot}e^{x-1}=+\infty$

Voici le tableau de variations de la fonction g :

x	0		$+\infty$
Variation de g	1	$\searrow$	$-\infty$

De plus :

- la fonction g est continue $[0\,;+\infty[$.
- la fonction g est strictement décroissante $[0\,;+\infty[$.
- le nombre 0 est compris entre les limites de la fonction g aux bornes de cet intervalle

D'après le corollaire des valeurs intermédiaire, il existe un unique nombre α appartenant à $[0\,;+\infty[$ tel que :
$g(\alpha)=0$

On remarque alors que 1 est cette unique solution car $1\in[0\,;+\infty[$ et :
$g(1)=1-1^2{\times}e^{1-1}=1-e^0=0$

4. D'après la question 1., les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ ont pour équation :
$y=\big[(a+1){\cdot}e^{a-1}\big]{\cdot}x+\big(1-a^2{\cdot}e^{a-1}\big)$
La tangente recherchée a pour équation :
$y=\big[(1+1){\cdot}e^{1-1}\big]{\cdot}x+\big(1-1^2{\cdot}e^{1-1}\big)$
$y=2{\cdot}e^0{\cdot}x+\big(1-e^0\big)$
$y=2{\cdot}x+0$
$y=2{\cdot}x$

Correction 11

1. a. Deux conditions sont nécessaires à vérifier pour que la fonction f soit définie :

- Pour que la racine carrée soit définie, il faut que l'expression se trouvant sous le radical soit positif ou nul ; on a la factorisation suivante :
$x^2-1=(x+1){\cdot}(x-1)$
Le coefficient du terme du second degré étant positif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'expression $\sqrt{x^2-1}$ est définie sur : $\mathcal{D}=]-\infty\,;-1]\cup]1\,;+\infty[$
Le dénominateur de l'expression de f ne s'annulant pas sur $\mathcal{D}$, on en déduit que la fonction f admet l'ensemble $\mathcal{D}$ comme ensemble de définition.

- De plus, pour qu'un quotient soit défini, il est nécessaire que son quotient soit non nul ; ainsi, la fonction f n'est pas définie en -1.

L'ensemble de définition de la fonction f est :
$\mathcal{D}_f=]-\infty\,;-1[\cup[1\,;+\infty[$

b.
- La fonction f est continue en 1, on a :

$$\lim_{x\mapsto1^+}f(x)=\lim_{x\mapsto1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}-1}{x+1}=\frac{\sqrt{1^2-1}-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

- On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-1^-}\sqrt{x^2-1}-1=0-1=-1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-1^-}x+1=0^-$$

On en déduit la valeur limite du quotient :

$$\lim_{x\mapsto -1^-} f(x) = \lim_{x\mapsto -1^-} \frac{\sqrt{x^2-1}-1}{x+1} = +\infty$$

On utilisera dans les deux limites suivantes, la transformation algébrique suivante pour tout $x\in\mathcal{D}_f$ $\big(0\notin\mathcal{D}_f\big)$:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}-1}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}-1}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{|x|\cdot\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-1}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{|x|\cdot\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{|x|}\right)}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$$

- Sur l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$, on a :

$$f(x)=\frac{|x|\cdot\left[\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{|x|}\right]}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{x\cdot\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}\right)}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} 1+\frac{1}{x}=1$$

Ainsi, on a la limite suivante du quotient :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = \frac{1}{1}=1$$

- Sur l'intervalle $\big]-\infty\,;-1\big[$, on a :

$$f(x)=\frac{|x|\cdot\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{|x|}\right)}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{-x\cdot\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{-x}\right)}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$$

$$=-\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} 1+\frac{1}{x}=1$$

Ainsi, on a la limite suivante du quotient :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto-\infty} -\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = -\frac{1}{1}=-1$$

c. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet trois asymptôtes :

- En $+\infty$, elle admet une asymptôte horizontale d'équation : $y=1$
- En $-\infty$, elle admet une asymptôte horizontale d'équation : $y=-1$
- En -1 à gauche, elle admet une asymptôte verticale d'équation : $x=-1$

2. a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme $f(x)=\dfrac{u(x)-1}{v(x)}$ où :

$$u(x)=\sqrt{x^2-1} \quad ; \quad v(x)=x+1$$

Déterminons les expressions des dérivées de ces deux fonctions :

- La fonction u est définie par la composée de la fonction w par la fonction racine carrée où :

$$w(x)=x^2-1 \quad ; \quad w'(x)=2x$$

La formule de dérivation de la composée d'une fonction par la fonction racine carrée permet d'écrire :

$$u'(x)=\frac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

- $v'(x)=1$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-\big[u(x)-1\big]\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cdot(x+1)-\left(\sqrt{x^2-1}-1\right)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-1}+1}{(x+1)^2}=\frac{\dfrac{x^2+x-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{x^2+x-x^2+1+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{x+1+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{(x+1)^2}=\frac{x+1+\sqrt{x^2-1}}{(x+1)^2\cdot\sqrt{x^2-1}}$$

b. On remarque facilement que sur l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$, le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs : f' est strictement positive sur cet intervalle.

La fonction f est strictement croissante sur $\big[1\,;+\infty\big[$.

x	1	$+\infty$
Variation de f	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$ 1

3. a. On a les limites aux bornes de $\big[1\,;+\infty\big[$:

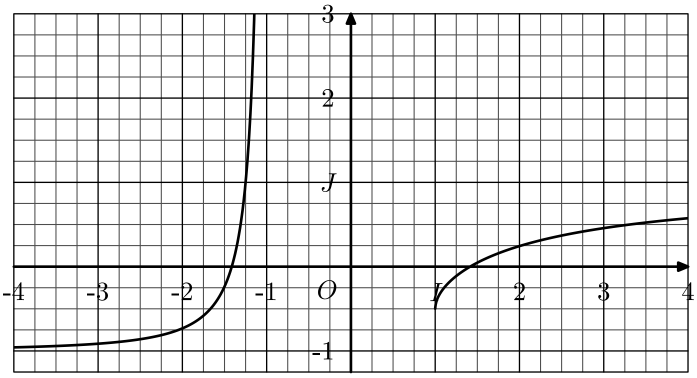
$$f(1)=-\frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=1$$

De plus, on sait que :

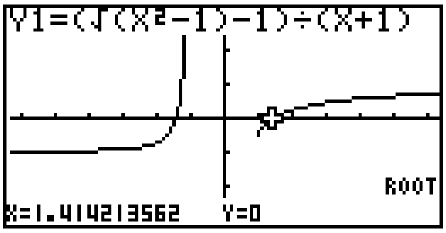
- la fonction f est continue sur $\big[1\,;+\infty\big[$
- la fonction f est strictemetn croissante sur $\big[1\,;+\infty\big[$
- e nombre 0 est compris entre les limites aux bornes de l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha\in\big[1\,;+\infty\big[$ telle que : $f(\alpha)=0$

b. La courbe représentative de cette fonction a pour allure :



A l'aide de la calculatrice, on obtient une valeur approchée de cette racine :
$\alpha \approx 1{,}4142$



Correction 12

1. • La fonction f peut être écrite sous la forme :
$f(x) = x-1+2\times\dfrac{1}{u(x)}$
où la fonction u est définie par :
$u(x)=x^2+1 \quad ; \quad u'(x)=2x$
La formule de dérivation de la composée d'une fonction par la fonction inverse donne l'expression de la fonction f' :
$$f'(x) = 1+2\times\left[-\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2}\right]$$
$$= 1+2\times\left[-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right] = 1-\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$
• L'expression de la fonction f' est donnée sous la forme :
$f'(x) = 1-\dfrac{u(x)}{v(x)}$
où les fonctions u et v sont définies par :
$u(x)=4x \quad ; \quad v(x)=\left(x^2+1\right)^2$
qui admettent pour dérivées :
⇨ $u'(x)=4$
⇨ L'expression de la fonction v est définie par le carré de la fonction w où :
$w(x)=x^2+1 \quad ; \quad w'(x)=2x$
La formule de dérivation de la puissance n-ième d'une fonction donne :
$v'(x) = 2\times w'(x)\cdot w(x) = 2\times(2x)\left(x^2+1\right)$
$= 4x\cdot\left(x^2+1\right)$
La formule de dérivation du quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f :
$$f''(x) = 0-\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= 0-\frac{4\cdot\left(x^2+1\right)^2-4x\cdot\left[4x\cdot\left(x^2+1\right)\right]}{\left[\left(x^2+1\right)^2\right]^2}$$
$$= 0-\frac{4\cdot\left(x^2+1\right)^2-16x^2\cdot\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4}$$
$$= -\frac{\left(x^2+1\right)\left[4\cdot\left(x^2+1\right)-16x^2\right]}{\left(x^2+1\right)^4}$$
$$= -\frac{4\cdot\left(x^2+1\right)-16x^2}{\left(x^2+1\right)^3} = -\frac{4x^2+4-16x^2}{\left(x^2+1\right)^3}$$
$$= -\frac{4-12x^2}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{12x^2-4}{\left(x^2+1\right)^3}$$

2. a. Le polynôme $12x^2-4$ admet la factorisation :
$12x^2-4 = 4\cdot\left(3x^2-1\right) = 4\cdot\left(\sqrt{3}\cdot x+1\right)\left(\sqrt{3}\cdot x-1\right)$
Ce polynôme admet les deux racines $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Le numérateur du quotient définissant la fonction f'' est un polynôme du second degré dont le coefficient du terme du second degré est positif.
On a le tableau de signes de la fonction f'' :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$12x^2-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. On a les deux valeurs approchées des deux images suivantes :
$f'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 2{,}3 \quad ; \quad f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx -0{,}3$
On a la transformation algébrique suivante :
$$f'(x) = 1-\frac{4\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2} = 1-\frac{4\cdot x}{\left[x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]^2}$$
$$= 1-\frac{4\cdot x}{x^4\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2} = 1-\frac{4}{x^3\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}$$
qui permet d'obtenir les deux limites suivantes :
• $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} f'(x) = \lim_{x\mapsto-\infty} 1-\frac{4}{x^3\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2} = 1$
• $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} f'(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} 1-\frac{4}{x^3\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2} = 1$

On obtient le tableau de valeur suivant :

x	-∞	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
Variation de f'	1 ↗	$\simeq 2,3$ ↘	$\simeq -0,3$ ↗	1

3. a. Etudions l'équation $f'(x)=0$ sur les trois intervalles suivants :
• Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[$:
La fonction f' admet un minimum valant 1 : la fonction f' ne s'annule pas sur ce minimum.

- Sur l'intervalle $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$:
  On a les deux images aux bornes de cet intervalle :
  $f'\Big(-\frac{\sqrt{3}}{3}\Big)\approx 2{,}3 \quad ; \quad f'\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\Big)\approx -0{,}3$
  De plus :
  - la fonction f' est continue sur $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$
  - la fonction f' est strictement décroissante sur $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$
  - le nombre 0 est compris entre les images des bornes de cet intervalle.

  D'après le corollaire des valeurs intermédiaire, il existe, une unique valeur $\alpha\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ vérifiant :
  $f'(\alpha)=0$
  De plus, des valeurs approchées des images suivantes :
  $f'(0{,}2)\approx 0{,}26>0 \quad ; \quad f'(0{,}3)=-0{,}01<0$
  la fonction f' étant continue et changeant de signe sur $\big[0{,}2\,;\,0{,}3\big]$, on en déduit :
  $\alpha\in\big[0{,}2\,;0{,}3\big]$

- Sur l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\,;+\infty\right[$:
  On a les limites aux bornes de l'intervalle :
  $f'\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\Big)\approx -0{,}3 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f'(x)=+\infty.$
  De plus :
  - la fonction f' est continue sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\,;+\infty\right[$
  - la fonction f' est strictement croissante sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\,;+\infty\right[$
  - le nombre 0 est compris entre les limites aux bornes de cet intervalle.

  D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe, une unique valeur $\beta\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\,;+\infty\right[$.
  En observant que $f'(1)=0$, on en déduit : $\beta=1$

b. Ainsi, la fonction f' admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. a. On a les deux limites suivantes :

- $\lim_{x\mapsto-\infty} x-1+\frac{2}{x^2+1}=-\infty$
- $\lim_{x\mapsto+\infty} x-1+\frac{2}{x^2+1}=+\infty$

Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	↗	$f(\alpha)\simeq 1,13$	↘	1	↗	$+\infty$

Correction 13

1. a. • La fonction f peut s'exprimer par :

$f(x)=5x-\frac{1}{u(x)}$
où la fonction u est définie par :
$u(x)=x^2+x+1 \quad ; \quad u'(x)=2x+1$
La formule de dérivation de l'inverse d'une fonction permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x)=5-\left[-\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2}\right]=5+\frac{2x+1}{\big(x^2+x+1\big)^2}$$

- L'expression de la fonction f' est donnée sous la forme :
  $f'(x)=5+\frac{u(x)}{v(x)}$
  où les fonctions u et v sont définies par :
  $u(x)=2x+1 \quad ; \quad v(x)=\big(x^2+x+1\big)^2$
  Ces deux fonctions admettent pour dérivées :
  - $u'(x)=2$
  - La formule de dérivation de la puissance n-ième donne l'expression de la fonction v' :
    $v'(x)=2\cdot(2x+1)\cdot(x^2+x+1)$

  On obtient l'expression de la fonction f'' dérivée de la fonction f' à l'aide de la formule de dérivation d'un quotient :

$$f''(x)=0+\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$=\frac{2\cdot\big(x^2+x+1\big)^2-\big(2x+1\big)\cdot\Big[2\cdot\big(2x+1\big)\cdot\big(x^2+x+1\big)\Big]}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$=\frac{2\cdot\big(x^2+x+1\big)\cdot\Big[\big(x^2+x+1\big)-\big(2x+1\big)^2\Big]}{\Big[\big(x^2+x+1\big)^2\Big]^2}$$

$$=\frac{2\cdot\big(x^2+x+1\big)\cdot\Big[x^2+x+1-\big(4x^2+4x+1\big)\Big]}{\big(x^2+x+1\big)^4}$$

$$=\frac{2\cdot\big(-3x^2-3x\big)}{\big(x^2+x+1\big)^3}=\frac{-6\cdot\big(x^2+x\big)}{\big(x^2+x+1\big)^3}=\frac{-6x\cdot(x+1)}{\big(x^2+x+1\big)^3}$$

b. Pour étudier le signe de la fonction f'', il faut étudier le signe du dénominateur. Pour cela, considérons le polynôme $x^2{+}x{+}1$ dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=1^2-4\times1\times1=1-4=-3$
Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme ne s'annule pas et a pour signe celui de son coefficient du terme du second degré : on en déduit que ce polynôme est positif sur $\mathbb{R}$, il en est donc de même du dénominateur du quotient de f''.
On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-6x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x^2+x+1)^3$		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. a. Pour déterminer les limites de la fonction f' aux bornes de son ensemble de définition, on utilise l'expression suivante de la fonction f' pour $x\neq0$:

$$f'(x) = 5 + \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2} = 5 + \frac{x\cdot\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{\left[x^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]^2}$$

$$= 5 + \frac{x\cdot\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{x^4\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)} = 5 + \frac{2+\dfrac{1}{x}}{x^3\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}$$

- Pour déterminer la limite en $-\infty$.
  Nous avons les deux limites suivantes :
  $$\lim_{x\mapsto-\infty} 2+\frac{1}{x} = 2 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} x^3\cdot\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$
  On en déduit la limite :
  $$\lim_{x\mapsto-\infty} f'(x) = \lim_{x\mapsto-\infty} 5 + \frac{2+\dfrac{1}{x}}{x^3\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}$$
  $$= 5 - 0 = 5$$
- Pour déterminer la limite en $+\infty$.
  Nous avons les deux limites suivantes :
  $$\lim_{x\mapsto+\infty} 2+\frac{1}{x} = 2 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} x^3\cdot\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$
  On en déduit la limite :
  $$\lim_{x\mapsto+\infty} f'(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} 5 + \frac{2+\dfrac{1}{x}}{x^3\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}$$
  $$= 5 - 0 = 5$$

La fonction f' prend les deux valeurs suivantes :

- $f'(-1) = 5 + \dfrac{2\times(-1)+1}{\left[(-1)^2+(-1)+1\right]^2}$
  $= 5 - \dfrac{-2+1}{(1-1+1)^2} = 5 - \dfrac{-1}{1} = 5 - 1 = 4$
- $f'(0) = 5 + \dfrac{2\times0+1}{\left(0^2+0+1\right)^2} = 5 + \dfrac{0+1}{1^2}$
  $= 5 + 1 = 6$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
Variation de f'	5 ↘	4 ↗	6 ↘	5

b. Le tableau de variations de la fonction f' permet d'affirmer que cette fonction admet pour minimum la valeur 4 : la fonction f' est positive sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	

3. La fonction f admet l'expression suivante pour $x\neq0$:
$$f(x) = 5x - \frac{1}{x^2+x+1} = 5x - \frac{1}{x^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}$$

Etudions les limites de la fonction f aux bornes de $\mathbb{R}$:

- On a les limites suivantes :
  $$\lim_{x\mapsto-\infty} 5x = -\infty \;;\; \lim_{x\mapsto-\infty} x^2 = +\infty \;;\; \lim_{x\mapsto-\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = 1$$
  On en déduit la limite suivante :
  $$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = -\infty$$
- On a les limites suivantes :
  $$\lim_{x\mapsto+\infty} 5x = +\infty \;;\; \lim_{x\mapsto+\infty} x^2 = +\infty \;;\; \lim_{x\mapsto+\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = 1$$
  On en déduit la limite suivante :
  $$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$$

Ainsi, la fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

On a les limites aux bornes de l'ensemble de définition :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$$

De plus :

- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
- la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- le nombre 0 est compris entre les limites de la fonction f aux bornes de $\mathbb{R}$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f admet un et un unique antécédent sur $\mathbb{R}$ du nombre 0.

Correction 14

1. a.
- Pour dérivée la fonction f, considérons la fonction u définie par :
  $u(x) = \sqrt{x^2+1}$
  La fonction u es définie par la composée de la fonction v par la fonction racine carrée où :
  $v(x) = x^2+1 \quad ; \quad v'(x) = 2x$
  La formule de dérivation de la composée d'une fonction par la fonction racine carrée permet d'obtenir l'expression de la fonction u' :
  $$u'(x) = \frac{v'(x)}{2\cdot\sqrt{v(x)}} = \frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
  Ainsi, la fonction f admet la fonction f' pour dérivée dont l'expression est :
  $$f'(x) = \frac{3\times x}{\sqrt{x^2+1}} - 2$$
- La fonction f' admet une expression de la forme :
  $$f'(x) = \frac{u(x)}{v(x)} - 2$$
  où on a :
  $u(x) = 3x \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x^2+1}$
  qui admettent pour dérivée :
  $u'(x) = 3 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
  La formule de dérivation du quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f'' :

$$f''(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} - 0$$

$$= \frac{3\cdot\sqrt{x^2+1} - 3x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \frac{\dfrac{3\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{\dfrac{3(x^2+1)-3x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{3x^2+3-3x^2}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{1}{x^2+1}$$

$$= \frac{3}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

b. On a la transformation algébrique suivante :

$$f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} - 2 = \frac{3x}{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} - 2$$

$$= \frac{3x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 2 = \frac{3x}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 2$$

$$= \frac{x}{|x|}\cdot\frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 2$$

On en déduit les deux limites suivantes :

- On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \frac{x}{|x|} = -1 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto-\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 3$
On en déduit la limite :
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\mapsto-\infty} \frac{x}{|x|}\cdot\frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 2$
$= (-1)\times 3 - 2 = -3 - 2 = -5$
- On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{x}{|x|} = 1 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 3$
On en déduit la limite :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{x}{|x|}\cdot\frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 2$
$= 1\times 3 - 2 = 3 - 2 = 1$

c. En regroupant les deux questions précédentes, on obtient le tableau de signes de la fonction f'' qui permet d'obtenir le tableau de variations de la fonction f' :

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de f''		$+$	
Variation de f'	-5	$\nearrow$	1

2. a. On a les deux limites aux bornes de $\mathbb{R}$:
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f'(x) = -5 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} f'(x) = 1$

De plus, on a :

- la fonction f' est continue sur $\mathbb{R}$
- la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- le nombre 0 est compris entre les limites aux bornes de $\mathbb{R}$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α solution de l'équation :
$f'(x) = 0$

b. A l'aide de la calculatrice, on a les deux valeurs approchées suivantes :
$f'(0{,}8) \approx -0{,}13 \quad ; \quad f'(0{,}9) \approx 0{,}01$
De plus :

- la fonction f est continue $[0{,}8\,;0{,}9]$
- la fonction f est strictemetn croissante sur $[0{,}8\,;0{,}9]$
- les images des bornes de $[0{,}8\,;0{,}9]$ sont de signes contraires

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'antécédent α de 0 par le fonction f appartient à l'intervalle $[0{,}8\,;0{,}9]$.

3. a. D'après le tableau de variations de la fonction f' et en prenant en compte que la fonction f' ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}$, on obtient le tableau de signes de la fonction f' :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

b. Le tableau de signes de la fonction f' permet d'obtenir le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$		$\nearrow$	

Le tableau de variations de la fonction f admet un minimum en α.

Correction 15

1.
- L'expression de la fonction g peut s'écrire sous la forme :
$g(x) = x\cdot\left(\mathrm{e}^x - e\right) + e - 2 = u(x)\cdot v(x) + e - 2$
où les fonctions u et v définies par :
$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^x - e$
et admettent pour dérivée :
$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \mathrm{e}^x$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir la fonction dérivée g' :
$g'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) + 0$
$= 1\cdot(\mathrm{e}^x - e) + x\cdot\mathrm{e}^x = x\cdot\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - e$
- L'expression de la fonction g' peut s'exprimer sous la forme :
$g'(x) = x\cdot\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - e = u(x)\cdot v(x) + \mathrm{e}^x - e$
où les deux fonctions u et v définies par :
$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^x$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \mathrm{e}^x$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir la dérivée seconde g'' :
$g''(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) + \mathrm{e}^x - 0$
$= 1\cdot\mathrm{e}^x + x\cdot\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = 2\cdot\mathrm{e}^x + x\cdot\mathrm{e}^x = (2+x)\cdot\mathrm{e}^x$

2. Sur $[0\,;+\infty[$, les facteurs $2{+}x$ et e^x sont positifs. Donc la fonction g'' est positive sur $[0\,;+\infty[$.
On en déduit que la fonction g' est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

3. On a les deux informations suivantes sur la fonction g' :
- $g'(0) = 0\times\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0 - e = 1 - e < 0$
- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g'(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\cdot\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - e = +\infty$

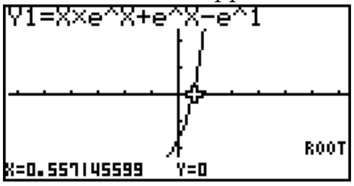
De plus :

- la fonction g' est continue sur $[0\,;+\infty[$
- la fonction g' est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$
- 0 est compris entre les limites des bornes de l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on déduit l'existence d'un unique nombre α appartenant à $\big[0\,;+\infty\big[$ tel que :

$g'(\alpha) = 0$.

La capture d'écran ci-dessous montre la recherche à la calculatrice de cette valeur approchée :



On a la valeur approchée : $\alpha \approx 0{,}6$

4. Ainsi, la fonction g' s'annulant en α et étant strictement croissante, elle admet le tableau de signes suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit les variations de la fonction g :

- Sur $\big[0\,;\alpha\big]$, la fonction g est strictement décroissante ;
- Sur $\big[\alpha\,;+\infty\big[$, la fonction g es strictement croissante.

Correction 16

Partie A

1. On a les transformations algébriques suivantes :

$g(x) = e^x - x\cdot e^x + 1 = e^x\cdot\big(1-x\big) + 1$

On a les deux limites suivantes :

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^x = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} 1-x = -\infty$

On en déduit la limite du produit :

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^x\cdot(1-x) = -\infty$

et donc, celle de la fonction g : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x) = -\infty$

2. La fonction g admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est :

$$g'(x) = e^x - \big(1\cdot e^x + x\cdot e^x\big) + 0 = e^x - e^x - x\cdot e^x = -x\cdot e^x$$

On en déduit sur $\big[0\,;+\infty\big[$, le signe des deux expressions suivantes :

$-x < 0 \quad ; \quad e^x > 0$

On en déduit que la fonction g' est strictement négative sur $\big[0\,;+\infty\big[$; la fonction g est strictement décroissante sur son ensemble de définition.

3. L'image de 0 par la fonction f a pour valeur :

$g(0) = e^0 - 0\times e^0 + 1 = 1 - 0 + 1 = 2$.

La fonction g admet le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
Variation de g	2 ↘	$-\infty$

4. a. On a les deux limites aux bornes de $\big[0\,;+\infty\big[$:

$g(0) = 2 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x) = -\infty$

De plus :

- la fonction g est continue sur $\big[0\,;+\infty\big[$
- la fonction g est strictement décroissance sur $\big[0\,;+\infty\big[$
- le nombre 0 est compris entre les limites de la fonction f aux bornes de cet intervalle.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique nombre α appartenant à $\big[0\,;+\infty\big[$ vérifiant :

$g(\alpha) = 0$

b. A l'aide de la calculatrice, on a l'encadrement à 10^{-2} près :

$1{,}27 < \alpha < 1{,}28$

c. Le nombre α vérifie l'égalité suivante :

$$g(\alpha) = 0$$
$$e^\alpha - \alpha\cdot e^\alpha + 1 = 0$$
$$e^\alpha\cdot\big(1-\alpha\big) = -1$$

Puisque $\alpha \neq 1$, on a :

$$e^\alpha = \frac{-1}{1-\alpha}$$
$$e^\alpha = \frac{1}{\alpha-1}$$

5. La fonction g est strictement décroissante sur $\big[0\,;+\infty\big[$ et s'annule en α, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

1. L'expression de la fonction A est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v définies par :

$u(x) = 4\cdot x \quad ; \quad v(x) = e^x + 1$

qui admettent pour dérivées :

$u(x) = 4 \quad ; \quad v'(x) = e^x$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction A' :

$$A'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{4\cdot(e^x+1) - 4\cdot x\cdot e^x}{\big(e^x+1\big)^2}$$
$$= \frac{4\cdot e^x + 4 - 4\cdot x\cdot e^x}{\big(e^x+1\big)^2} = \frac{4\cdot\big(e^x + 1 - x\cdot e^x\big)}{\big(e^x+1\big)^2} = \frac{4\cdot g(x)}{\big(e^x+1\big)^2}$$

Le dénominateur de la dérivée g' est strictement positif sur $\big[0\,;+\infty\big[$; ainsi, le signe de ce quotient ne dépend que de son numérateur, plus précisément, il ne dépend que du signe de la fonction g.

2. Les fonctions dérivées g et A' ont le même signe sur $\big[0\,;+\infty\big[$; or, on a vu à la question **A**-5. que :

- g est positive sur l'intervalle $\big[0\,;\alpha\big]$; on en déduit que la fonction A est croissante sur $\big[0\,;\alpha\big]$.
- g est négative sur l'intervalle $\big[\alpha\,;+\infty\big[$; on en déduit que la fonction A est décroissante sur $\big[\alpha\,;+\infty\big[$.

Correction 17

1. a. Le polynôme P admet pour dérivée le polynôme P' défini par :

$P'(x) = 6\cdot x^2 - 6x = 6x\cdot(x-1)$

Le coefficient du second degré du polynôme P' est positif ; ainsi, le polynôme P' a pour tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour $x\neq 0$, on a la transformation algébrique suivante :

$P(x)=x^3\cdot\Big(2-\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}\Big)$

Ainsi, on a les deux limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}P(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}x^3\cdot\Big(2-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\Big)=-\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}P(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}x^3\cdot\Big(2-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\Big)=+\infty$

La fonction P admet les deux valeurs suivantes :

- $P(0)=2\times 3^3-3\times 0^2-1=-1$
- $P(1)=2\times 1^3-3\times 1^2-1=2-3-1=-2$

Ainsi, on a le tableau de vaiation suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Variation de P	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

b. Pour montrer que la fonction f ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}$, décomposons notre raisonnement sur les deux intervalles :

- Sur l'intervalle $\big]-\infty\,;1\big]$:
  D'après le tableau de variation, sur l'intervalle $\big]-\infty\,;1\big]$, la fonction f est majorée par -1 : la fonction f n'admet aucune racine sur l'intervalle $\big]-\infty\,;1\big]$.
- Sur l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$:
  On a : $P(1)=-2$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}P(x)=+\infty$

  De plus :
  - la fonction f est continue sur $\big[1\,;+\infty\big[$
  - la fonction f est strictement croissante sur $\big[1\,;+\infty\big[$
  - Le nombre 0 ést entre les limites aux bornes de l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$

  D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique nombre α antécédent du nombre 0 sur cet intervalle :
  $f(\alpha)=0$

Pour montrer que le nombre α appartient à l'intervalle $\big[1{,}6\,;1{,}7\big]$, on remarque que :

$P(1{,}6)\approx-0{,}49<0$; $P(1{,}7)\approx 0{,}16>0$

De plus, on a :

- la fonction f est continue sur $\big[1{,}6\,;1{,}7\big]$
- la fonction f est strictement croissante sur $\big[1{,}6\,;1{,}7\big]$
- le nombre 0 est compris entre les limites aux bornes de l'intervalle $\big[1{,}6\,;1{,}7\big]$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α appartenant à l'intervalle $\big[1{,}6\,;1{,}7\big]$ vérifiant :

$f(\alpha)=0.$

2. a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient $\dfrac{u}{v}$ où :

$u(x)=1-x$; $v(x)=1+x^3$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x)=-x$; $v'(x)=3\cdot x^2$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}=\frac{-1\cdot\big(1+x^3\big)-\big(1-x\big)\cdot 3\cdot x^2}{\big(1+x^3\big)^2}$$
$$=\frac{-1-x^3-3\cdot x^2+3\cdot x^3}{\big(1+x^3\big)^2}=\frac{2\cdot x^3-3\cdot x^2-1}{\big(1+x^3\big)^2}=\frac{P(x)}{\big(1+x^3\big)^2}$$

Le dénominateur de ce quotient est positif sur $\mathbb{R}$: le signe de la fonction f' ne dépend que du signe de P.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	

La fonction f, définie sur $\mathcal{D}=\big]-1\,;+\infty\big[$, admet le tableau de signes suivant :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

On a les limites suivantes :

- Déterminons la limite en -1 :
  On a les deux limites suivantes :
  $\displaystyle\lim_{x\mapsto-1^+}1-x=2$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto-1^+}1+x^3=0^+$
  Ainsi, par quotient, on a :
  $$\lim_{x\mapsto-1^+}f(x)=\lim_{x\mapsto-1^+}\frac{1-x}{1+x^3}=+\infty$$
- Déterminons la limite en $+\infty$:
  Pour $x\neq 0$, on a la transformation algébrique suivante :
  $$f(x)=\frac{1-x}{1+x^3}=\frac{x\cdot\Big(-1+\dfrac{1}{x}\Big)}{x\cdot\Big(x^2+\dfrac{1}{x}\Big)}=\frac{-1+\dfrac{1}{x}}{x^2+\dfrac{1}{x}}$$
  On a les deux limites suivantes :
  $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}-1+\frac{1}{x}=-1$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}x^2+\frac{1}{x}=+\infty$
  On en déduit la limite suivante :
  $$\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{-1+\dfrac{1}{x}}{x^2+\dfrac{1}{x}}=0$$

Une valeur approchée du minimum de la fonction f obtenue à l'aide de la calculatrice permet d'affirmer :

$f(\alpha)\approx-0{,}12$

On a le tableau de variations suivant :

x	-1		α		$+\infty$
Variation de f	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)\simeq-0,12$	$\nearrow$	0

b. On a les deux valeurs suivantes :

- $f(0)=\dfrac{1-0}{1+0^3}=\dfrac{1}{1}=1$
- $f'(0)=\dfrac{2\times 0^3-3\times 0^2-1}{\big(1+0^3\big)^2}=-1$

Ainsi, la droite (Δ), tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0 a pour équation :

$y=f'(0)\cdot(x-0)+f(0)$

$y=-1\cdot(x-0)+1$

$y=-x+1$

Pour étudier la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite (Δ), on étudie le signe de la différence suivante :

$$f(x)-\big(-x+1\big)=\frac{1-x}{1+x^3}-\big(-x+1\big)$$
$$=\frac{1-x}{1+x^3}+x-1=\frac{1-x+\big(x-1\big)\cdot\big(1+x^3\big)}{1+x^3}$$
$$=\frac{1-x+x+x^4-1-x^3}{1+x^3}=\frac{x^4-x^3}{1+x^3}$$
$$=\frac{x^3\cdot\big(x-1\big)}{1+x^3}$$

On a le tableau de signes suivant :

x	-1		0		1
x^3		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0
$1+x^3$		$+$		$+$	
$f(x){-}\big({-}x{+}1\big)$	‖	$+$	0	$-$	0

On en déduit :

- La courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $\big]-1\,;0\big]$.
- La courbe $(\mathscr{C})$ est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $\big[0\,;1\big]$.

c. On a les deux valeurs suivantes :

- $f(1)=\dfrac{1-1}{1+1^3}=\dfrac{0}{2}=0$
- $f'(1)=\dfrac{2\times1^3-3\times1^2-1}{\big(1+1^3\big)^2}=\dfrac{2-3-1}{\big(1+1\big)^2}$

$$=\frac{-2}{2^2}=-\frac{1}{2}$$

Ainsi, la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation réduite :

$$y=f'(1)\cdot\big(x-1\big)+f(1)$$
$$y=-\frac{1}{2}\cdot\big(x-1\big)+0$$
$$y=-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}$$

Etudions la différence suivante :

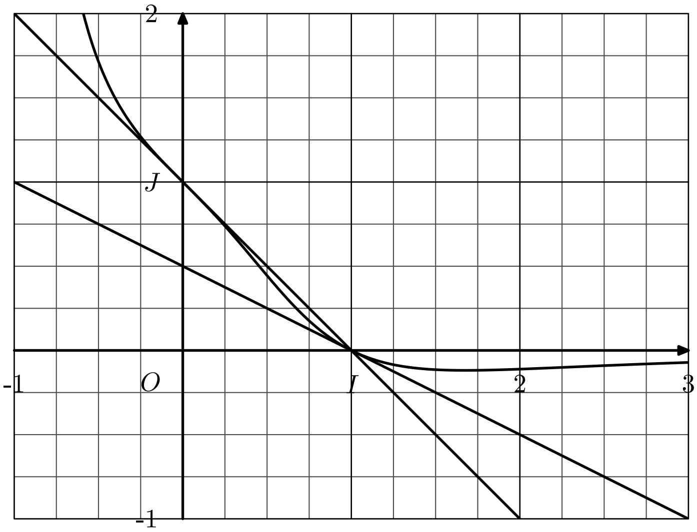
$$f(x)-\Big(-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\Big)=\frac{1-x}{1+x^3}+\frac{x-1}{2}$$
$$=\frac{2-2x}{2\cdot\big(1+x^3\big)}+\frac{(x-1)(1+x^3)}{2(1+x^3)}$$
$$=\frac{-2(x-1)+(x-1)(1+x^3)}{2(1+x^3)}$$
$$=\frac{(x-1)\big(-2+1+x^3\big)}{2(1+x^3)}=\frac{(x-1)(x^3-1)}{2(1+x^3)}$$

On a le tableau de signes suivant :

x	-1		1		$+\infty$
x^3-1		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$1+x^3$	0	$+$		$+$	
$f(x){-}\Big({-}\frac{1}{2}{\cdot}x{+}\frac{1}{2}\Big)$	‖	$+$	0	$+$	

Ainsi, la courbe $(\mathscr{C})$ est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.

Voici la représentation demandée :



Correction 18

1. - On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}x^3=-\infty\quad;\quad\lim_{x\mapsto-\infty}-\sqrt{1+2\cdot x^2}=-\infty$$

Par somme de ces deux limites, on obtient :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}x^3+\big(-\sqrt{1+2\cdot x^2}\big)=-\infty$$

- Pour $x\neq0$, on a la transformation algébrique :

$$f(x)=x^3-\sqrt{1+2\cdot x^2}$$
$$=x^3-\sqrt{x^2\cdot\Big(\frac{1}{x^2}+2\Big)}=x^3-|x|\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+2}$$

On travaille sur l'intervalle $\big]0\,;+\infty\big[$:

$$=x^3-x\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+2}=x\cdot\Big(x^2-\sqrt{\frac{1}{x^2}+2}\Big)$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}x=+\infty\quad;\quad\lim_{x\mapsto+\infty}x^2-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}=+\infty$$

Par produit des limites, on obtient :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}x\cdot\Big(x^2-\sqrt{\frac{1}{x^2}+2}\Big)=+\infty$$

2. a. L'expression de la fonction g est donnée sous la forme :

$$g(x)=u(x)\cdot v(x)-2$$

où les fonctions u et v sont définies par :

$$u(x)=3x\quad;\quad v(x)=1+2x^2$$

qui admettent pour dérivés :

- $u'(x)=3$
- La fonction v est définie par la composée de la fonction w par la fonction racine carrée où :

$$w(x)=2x^2+1\quad;\quad w'(x)=4x$$

La formule de dérivation de la composée d'une fonction par la racine carrée donne l'expression de la fonction v' :

$$v'(x)=\frac{w'(x)}{2\cdot\sqrt{w(x)}}=\frac{4x}{2\cdot\sqrt{2x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

La formule de dérivation du produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g' :

$$g'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v(x)-0$$
$$=3\cdot\sqrt{2x^2+1}+6x\cdot\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$$
$$=3\cdot\sqrt{2x^2+1}+\frac{6x^2}{\sqrt{2x^2+1}}=\frac{3\cdot\big(\sqrt{2x^2+1}\big)^2+6x^2}{\sqrt{2x^2+1}}$$
$$=\frac{3\cdot\big(2x^2+1\big)+6x^2}{\sqrt{2x^2+1}}=\frac{6x^2+3+6x^2}{\sqrt{2x^2+1}}=\frac{12x^2+3}{\sqrt{2x^2+1}}$$

Le numérateur et le dénominateur du quotient définis-

sant g' sont strictement positif sur $\mathbb{R}$: on en déduit que la fonction g' est positive sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. • On a les limites suivantes aux bornes de $\mathbb{R}$:
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x) = +\infty$
De plus :
- ➾ la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$
- ➾ la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- ➾ le nombre 0 est compris entre les limites de la fonction g aux bornes de $\mathbb{R}$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α vérifiant :
$g(\alpha) = 0$

• On a les images aux bornes de $[0{,}5\,;0{,}6]$:
$g(0{,}5) \approx -0{,}16 < 0$; $g(0{,}6) \approx 0{,}36$
De plus :
- ➾ la fonction g est continue sur $[0{,}5\,;0{,}6]$
- ➾ la fonction g est strictement croissante sur $[0{,}5\,;0{,}6]$
- ➾ le nombre 0 est compris entre les images aux bornes de $[0{,}5\,;0{,}6]$

D'après la corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α appartenant à $[0{,}5\,;0{,}6]$ tel que :
$g(\alpha) = 0$

c. Des questions précédentes, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	-∞		α		$+\infty$
Variation de g	-∞	↗	0	↗	$+\infty$

Ainsi, on obtient le tableau de signes de la fonction g :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3. a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$f(x) = x^3 - u(x)$
où la fonction u est définie par :
$u(x) = \sqrt{1+2x^2}$; $u'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+2x^2}}$
On en déduit l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = 3x^2 - u'(x) = 3{\cdot}x^2 - \frac{2x}{\sqrt{1+2{\cdot}x^2}} = \frac{3x^2{\cdot}\sqrt{2{\cdot}x^2+1} - 2x}{\sqrt{1+2{\cdot}x^2}}$$

$$= \frac{x{\cdot}\big(3x{\cdot}\sqrt{2{\cdot}x^2+1} - 2\big)}{\sqrt{1+2{\cdot}x^2}} = \frac{x{\cdot}g(x)}{\sqrt{1+2{\cdot}x^2}}$$

b. Le dénominateur de ce quotient est positif ; ainsi, le signe de la dérivée f' ne dépend que du signe du numérateur. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c. On a $f(0) = -1$ et la recherche de valeurs approchées d'extrémum par la calculatrice permet d'écrire :
$f(\alpha) \approx -1{,}1$
La fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	-∞		0		α		$+\infty$
Variation de f	-∞	↗	-1	↘	$f(\alpha) \simeq -1{,}1$	↗	$+\infty$

Correction 19

1. a. La fonction g admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est :
$g'(x) = -8{\times}3{\cdot}x^2 + 4 = -24{\cdot}x^2 + 4$
qui admet pour forme factorisée :

$$= -24\Big(x^2 - \frac{1}{6}\Big) = -24\Big(x + \frac{1}{\sqrt{6}}\Big)\Big(x - \frac{1}{\sqrt{6}}\Big)$$

On en déduit que le polynôme du second degré définissant la fonction g' admet pour racine :
$\mathcal{S} = \Big\{-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\,;\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Big\}$
Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on en déduit le tableau de signes de la fonction g' et par conséquence le tableau de variations de la fonction g :

x	-∞		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{1}{\sqrt{6}}$		$+\infty$
Signe de g'		-	0	+	0	-	
Variation de g	$+\infty$	↘	$-5,1$	↗	$-2,9$	↘	-∞

b. On a :
$g(-1) = -8{\times}(-1)^3 + 4{\times}(-1) - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$
Ainsi, le tableau de variations de la fonction g peut s'exprimer par :

x	-∞		-1		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{1}{\sqrt{6}}$		$+\infty$
Variation de g	$+\infty$	↘	0	↘	$\sim -5{,}1$	↗	$\sim -2{,}9$	↘	-∞

On remarque que :
- Sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$, la fonction f admet pour minimum 0 : la fonction f est positive sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$, la fonction f admet pour maximum 0 : la fonction f est négative ou nulle sur cet intervalle. Plus précisément, elle est strictement négativement sur $]-1\,;+\infty[$.

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2. a. Le polynôme du second degré $2x^2{+}2x{+}3$ admet

pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2 - 4{\times}2{\times}3 = 4 - 24 = -20$

Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucune racine.

On en déduit que le dénominateur du quotient définissant la fonction f ne s'annule jamais. L'ensemble de définition de la fonction f est :

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

b. Pour $x \neq 0$, on a les transformations algébriques :

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{\left(2x^2+2x+3\right)^2} = \frac{x^2{\cdot}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{\left[x^2{\cdot}\left(2+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\right]^2}$$

$$= \frac{x^2{\cdot}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^4{\cdot}\left(2+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^2} = \frac{2+\frac{1}{x^2}}{x^2{\cdot}\left(2+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^2}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} 2+\frac{1}{x^2} = 2 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} x^2{\cdot}\left(2+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^2 = +\infty$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto-\infty} \frac{2+\frac{1}{x^2}}{x^2{\cdot}\left(2+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^2} = 0$$

De même, on en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0$$

c. La fonction f est définie par le quotient de la fonction u par la fonction v où :

$u(x) = 2x^2+1 \quad ; \quad v(x) = \left(2x^2+2x+3\right)^2$

Déterminons l'expression des fonctions dérivées de ces deux fonctions :

- $u'(x) = 2{\times}(2x) = 4x$
- La fonction v est définie comme le carré de la fonction w où :

  $w(x) = 2x^2+2x+3 \quad ; \quad w'(x) = 2{\times}2x+2 = 4x+2$

  Ainsi, la formule de dérivation du carré d'une fonction permet d'obtenir l'expression de v' :

  $$v'(x) = 2{\cdot}w'(x){\cdot}w(x) = 2{\cdot}(4x+2){\cdot}\left(2x^2+2x+3\right)$$
  $$= (8x+4){\cdot}\left(2x^2+2x+3\right)$$

La formule de dérivation du quotient permet d'obtenir l'expression de la dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$

$$= \frac{4x{\cdot}\left(2x^2+2x+3\right)^2 - \left(2x^2+1\right){\cdot}(8x+4){\cdot}\left(2x^2+2x+3\right)}{\left[\left(2x^2+2x+3\right)^2\right]^2}$$

$$= \frac{\left(2x^2+2x+3\right){\cdot}\left[4x{\cdot}\left(2x^2+2x+3\right) - \left(2x^2+1\right){\cdot}(8x+4)\right]}{\left(2x^2+2x+3\right)^4}$$

$$= \frac{4x{\cdot}\left(2x^2+2x+3\right) - \left(2x^2+1\right){\cdot}(8x+4)}{\left(2x^2+2x+3\right)^3}$$

$$= \frac{8x^3+8x^2+12x - \left(16x^3+8x^2+8x+4\right)}{\left(2x^2+2x+3\right)^3}$$

$$= \frac{8x^3+8x^2+12x-16x^3-8x^2-8x-4}{\left(2x^2+2x+3\right)^3}$$

$$= \frac{-8x^3+4x-4}{\left(2x^2+2x+3\right)^3}$$

d. On remarque que l'expression de la fonction f' peut s'écrire :

$$f'(x) = \frac{-8x^3+4x-4}{\left(2x^2+2x+3\right)^3} = \frac{g(x)}{\left(2x^2+2x+3\right)^3}$$

Le polynôme $2x^2+2x+3$ a un discriminant strictement négatif et son coefficient du terme du second degré est positif : ce polynôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction f' est du même signe que $g(x)$.

x	-∞		-1		$+\infty$
Signe de f'		+	0	-	
Variation de f	0	↗	0,333	↘	0

e. D'après le tableau de variation, la fonction f admet pour minorant le nombre 0 : la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		+	

Correction 20

1. a. La fonction f admet pour dérivée :

$f'(x) = 3x^2+3$

La fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$; on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, la factorisation suivante :

$f(x) = x{\cdot}\left(x^2+3\right)$

permet d'obtenir les limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$$

Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	↗	$+\infty$

b. Sur $\mathbb{R}$, on a les limites aux bornes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$$

De plus :

- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$
- la fonction f strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- le nombre 5 est compris entre les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}$

D'après le corollaire des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α vérifiant :

$f(\alpha) = 5.$

2. a. On a le tableau :

	a_n	c_n	b_n	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(b_n)$
$n=0$	0	1	2	-5	$-1{,}5$	5
$n=1$	1	1,5	2	$-1{,}5$	1,188	5
$n=2$	1	1,25	1,5	$-1{,}5$	$-0{,}273$	1,188
$n=3$	1,25	1,375	1,5	$-0{,}273$	0,425	1,188
$n=4$	1,25	1,313	1,375	$-0{,}273$	0,068	0,425
$n=5$	1,25	1,281	1,313	$-0{,}105$	$-0{,}019$	0,068
$n=6$	1,281	1,297	1,313	$-0{,}105$	$-0{,}019$	0,068

b. Ainsi, la valeur α appartient à l'intervalle :
$\big[1{,}281\,;1{,}313\big]$
Cet intervalle a une amplitude de :
$1{,}313-1{,}281=0{,}032$
C'est la précision qu'on a sur α au rang 6.

