# TD Convergence et Limites de Suites - Tale spé

## Exercice 1

On considère la suite arithmétique $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $\dfrac{3}{4}$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
2. Donner la formule explicite de $\left(u_n\right)$ donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
3. Déterminer la valeur de la suite suivante :
   $S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{12}$

## Exercice 2

On considère la suite géométrique $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $\dfrac{16}{27}$ et de raison $\dfrac{3}{2}$.

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
2. Donner la formule explicite de $\left(u_n\right)$ donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
3. Déterminer la valeur de la suite suivante :
   $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{16}$

## Exercice 3

Déterminer la valeur de chacune des sommes suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{i=0}^{7} i$ b. $\displaystyle\sum_{i=3}^{8} (i^2 - i)$ c. $\displaystyle\sum_{i=0}^{7} (i-4)$

d. $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i}$ e. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i^2}$ f. $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{3} \left[\sum_{i=0}^{\ell} i\right]$

## Exercice 4

Justifier que, dans chaque question, les informations ci-dessous ne définissent pas de suites :

a. $u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = 2\cdot u_n - 3 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

b. $u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n - 3 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

c. $u_0 = 3 \quad ; \quad u_n = 2\cdot u_{n-1} - 2 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

d. $u_0 = -1 \quad ; \quad u_n = \dfrac{u_{n-1} - 2}{u_{n-1} + 1} \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

## Exercice 5

1. On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie explicitement par :
   $u_n = 9n - 5$
   a. Déterminer la nature de la suite $\left(u_n\right)$ en précisant ses caractéristiques.
   b. Déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)$.
2. On considère la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie explicitement par :
   $v_n = 2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
   a. Déterminer la nature de la suite $\left(v_n\right)$ en précisant ses caractéristiques.
   b. Déterminer la limite de la suite $\left(v_n\right)$.

## Exercice 6*

Donner, si possible, les limites des suites suivantes :

1. La suite $\left(u_n\right)$ est géométrique de premier terme strictement négatif et de raison $2$.
2. La suite $\left(v_n\right)$ est géométrique de premier terme strictement positive et de raison $-3$.
3. La suite $\left(w_n\right)$ est géométrique de premier terme strictement négative et de raison $-0{,}2$.

## Exercice 7

1. Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $2$ et de raison $-1$.
   a. Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang $n$.
   b. On note $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite. Donner l'expression de $S_n$ en fonction de $n$.
   c. En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} S_n$.
2. Soit $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $5$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.
   a. Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang $n$.
   b. On note $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite. Donner l'expression de $S'_n$ en fonction de $n$.
   c. En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} S'_n$.

## Exercice 8*

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme $4\times5^2$ et de raison $\dfrac{1}{5}$ et la somme $S_n$ définie par :
$S_n = u_3 + u_4 + \cdots + u_n \quad$ pour tout $n \geqslant 5$

1. Déterminer l'expression de $S_n$ en fonction de $n$.
2. Justifier que la suite $\left(S_n\right)$ converge vers $1$.

## Exercice 9

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme $1$ et de raison $\dfrac{1}{2}$ et la suite $(R_n)$ définie, pour $n\geqslant2$, par la somme :
$R_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n}$

Déterminer la limite de la suite $(R_n)$.

## Exercice 10*

Déterminer, en justifiant vos démarches, les limites des sommes suivantes :

a. $S = \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

b. $S' = -\dfrac{15}{4} + 5\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 - 5\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 + 5\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^4 + \cdots + 5\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$

## Exercice 11

 

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n \quad ; \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}$$

1. Exprimer le terme $S_n$ en fonction de $n$.

2. Déterminer la limite de la suite $(T_n)$.

## Exercice 12

On définit les deux suites $u$ et $v$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 12 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot(u_n+2\cdot v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}\cdot(u_n+3\cdot v_n) \end{cases} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_n$ | $y_n$ | $w_n$ | | $t_n$ |
| 2 | 1 | 12 | | | |
| 3 | 8,33 | 9,25 | | | |
| 4 | 8,94 | 9,02 | | | |
| 5 | 9,00 | 9,00 | | | |
| 6 | 9,00 | 9,00 | | | |

1. A l'aide d'un tableur, générer les 20 premiers termes des ces deux suites afin d'obtenir un tableau analogue à celui présenté ci-contre.

2. On définit la suite $(w_n)$ par : $w_n = v_n - u_n$
   a. Dans la colonne `C`, exprimer les 20 premiers termes de la suite $w$.
   b. Que peut-on faire pour mettre en évidence que la suite $w$ suit une progression géométrique sur ces 20 premiers termes?

2. On définit la suite $t$ définie par : $t_n = 3\cdot u_n + 8\cdot v_n$
   a. Exprimer les 20 premiers termes de la suite $t$.
   b. Quelle conjecture peut-on effectuer sur la nature de la suite $t$?

## Exercice 13*

On considère les deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ définies conjointement par les relations :

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_{n+1} = 0{,}8\cdot x_n - 0{,}6\cdot y_n \\ y_{n+1} = 0{,}6\cdot x_n + 0{,}8\cdot y_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | $x_n$ | $y_n$ |
| 2 | -3 | 4 |
| 3 | -4,8 | 1,4 |
| 4 | -4,68 | 1,76 |
| 5 | -2,688 | -4,216 |
| 6 | 0,3792 | -4,9856 |
| 7 | 3,29472 | -3,76096 |

1. A l'aide d'un tableur, générer les 100 premiers termes de la suite dans un tableau semblable à celui représenter ci-contre.

2. Utiliser l'outil graphique en sélectionnant la plage `A2:B101` pour représenter dans le plan les points $M_n$ définis par $M_n(x_n\,;y_n)$.
   On choisirera le mode de représentation "*XY (dispersion)*".

3. a. Quelle conjecture peut-on émettre sur la position de la suite de points $(M_n)$ dans le plan?
   b. Vérifier que le point $M_0$ vérifie cette conjecture.
   c. Etablir la relation : $OM_{n+1} = OM_n$
   d. Compléter la phrase suivante :
   "*Si, pour tout entier naturel, les termes d'une suite vérifie la relation $u_{n+1} = u_n$ alors la suite est .........*"

## Exercice 14

On considère la suite $(u_n)$ définie par la relation :

$u_0 = 8 \quad ; \quad u_{n+1} = 0{,}95\cdot u_n + 0{,}5 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. On définit la suite $(v_n)$ définie par la relation :
   $v_n = u_n - 10 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a. Justifier que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,95. On précisera la valeur de son premier terme.
   b. Exprimer les termes de la suite $(v_n)$ en fonction de $n$.

2. En déduire une expression de la suite $(u_n)$ en fonction de $n$

3. Déterminer la limite des termes de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

## Exercice 15

On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies conjointement par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ v_0 = 4 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = 2\cdot u_n - v_n \\ v_{n+1} = -3\cdot u_n + 4\cdot v_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. On considère la suite $(w_n)$ définie par la relation :
   $w_n = v_n - u_n \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a. Etablir que la suite $(w_n)$ est une suite géométrique de raison 5.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, le terme de rang $n$ s'exprime par :
   $w_n = -5^n$

2. On considère la suite $(t_n)$ définie par :
   $t_n = 3\cdot u_n + v_n$
   a. Montrer que : $t_0 = 19$
   b. Etablir que pour tout entier naturel, on a l'égalité : $t_{n+1} = t_n \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   On admettra que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $t_n = 19$

3. Déduire une expression des termes des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ en fonction de $n$.

4. En déduire les limites des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

## Exercice 16

On considère les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 6 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}2\cdot a_n + 1{,}3\cdot b_n \\ b_{n+1} = -0{,}8\cdot a_n - 0{,}2\cdot b_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Exprimer les termes $a_{n+2}$ et $b_{n+2}$ en fonction des termes $a_n$ et $b_n$.

2. Que peut-on dire des termes de la suite $(a_{2n})$?

## Exercice 17

Soit $(u_n)$ la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel $n$ par :

$u_{n+1} = 0{,}5\cdot u_n + 0{,}5\cdot n - 1{,}5$

1. Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par :
   $v_n = 0{,}1\cdot u_n - 0{,}1\cdot n + 0{,}5$

 

Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors $v_n$ en fonction de $n$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel $n$ :
$u_n = 10 \times 0{,}5^n + n - 5$

3. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)$

## Exercice 18

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \quad ; \quad u_{n+1} = 7\cdot u_n + 8\cdot u_{n-1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite $(u_n)$.

2. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$s_n = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
est une suite géométrique dont on précisera la raison.
En déduire $s_n$ en fonction de $n$.

3. a. On pose $v_n = (-1)^n \cdot u_n$ et on considère la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $t_n = v_{n+1} - v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
Exprimer $t_n$ en fonction de $s_n$.
   b. Quel est la nature de la suite $(t_n)$.

4. a. Exprimer $v_n$, puis $u_n$, en fonction de $n$ *(on pourra calculer, de deux manières, la somme $t_0 + \cdots + t_{n-1}$)*.
   b. Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{u_n}{8^n}$.

## Exercice 19

Déterminer les limites des suites $(u_n)$ définies ci-dessous :

a. $n^3 \times 5^n$ b. $n - \left(\frac{2}{7}\right)^n$ c. $\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n$

d. $8^n - 3^n$ e. $\dfrac{5^n - 2^n}{3^n + 2^n}$ f. $\left(\frac{31}{7}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^n$

## Exercice 20*

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite $(u_n)$ dont le terme général en fonction de $n$ est donné ci-dessous

a. $n^5 \times \left(\frac{3}{n^2}\right)^3$ b. $5^n - 8^n$

c. $\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n+2}$ d. $\dfrac{3^n - 2^n}{5^n - 4^n}$

## Exercice 21

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme de rang $n$ est définie par la relation :

$$u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

1. Etablir l'encadrement suivant pour tout entier naturel $n$ non-nul : $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{n+1}$

2. En déduire la convergence de la suite $(u_n)$ ; on précisera la valeur de la limite.

## Exercice 22

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule explicite de son terme de rang $n$ :
$u_n = \sqrt{2\cdot n+1} - \sqrt{2\cdot n}$

1. Montrer l'égalité suivante pour tout $n\in\mathbb{N}$ :
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2\cdot n+1} + \sqrt{2\cdot n}}$$

2. Pour tout entier naturel $n$ non-nul, établir l'encadrement suivant : $0 < u_n < \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{2\cdot n}}$

3. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

## Exercice 23

Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ci-dessous définies explicitement :

a. $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 1}{n+1}$ b. $u_n = \dfrac{n-3}{n^2+1}$

c. $u_n = \dfrac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1}$ d. $u_n = 1 + n - 2n^2 + 3n^3$

## Exercice 24

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} n^2 + 2$ b. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} 2 + \frac{1}{n}$

c. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} n^3 + n + 2$ d. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} n - \frac{1}{n}$

e. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} n\cdot(n-10)$ f. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{n+1}$

## Exercice 25*

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} n^2 - n$ b. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{n^2+n+1}{n}$

c. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$ d. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{n}{n^2+n+1}$

e. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{2n^2+n+1}{n-2}$ f. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$

 