Correction 1

1. Une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ vérifie la relation :

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$

Ainsi, on obtient la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = \frac{3}{4}$
- $u_1 = u_0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$
- $u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$
- $u_3 = u_2 + \frac{1}{2} = \frac{7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$
- $u_4 = u_3 + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$

2. La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $\frac{3}{4}$ et de raison $\frac{1}{2}$; ainsi, le terme u_n de rang n vérifie explicitement la formule suivante :

$u_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot n$

3. D'après la formule explicite du terme u_n de rang n, on obtient :

- $u_5 = \frac{3}{4} + 5\times\frac{1}{2} = \frac{13}{4}$
- $u_{12} = \frac{3}{4} + 12\times\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + 6 = \frac{27}{4}$

La somme S est la somme des termes conséctuif de la suite de u_5 à u_{12} ; c'est donc la somme de $12-5+1=8$ termes consécutifs de cette suite ; ainsi, la valeur de S est donnée par la formule :

$$S = \frac{(u_5+u_{12})\times 8}{2} = \frac{\left(\frac{13}{4}+\frac{27}{4}\right)\times 8}{2}$$
$$= \left(\frac{13}{4}+\frac{27}{4}\right)\times 4 = \frac{40}{4}\times 4 = 40$$

Correction 2

1. La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $\frac{16}{27}$ et de raison $\frac{3}{2}$; ainsi, on peut déterminer les cinq premiers termes de la suite :

- $u_0 = \frac{16}{27}$
- $u_1 = \frac{3}{2}\times\frac{16}{27} = \frac{8}{9}$
- $u_2 = \frac{3}{2}\times\frac{8}{9} = \frac{4}{3}$
- $u_3 = \frac{3}{2}\times\frac{4}{3} = 2$
- $u_4 = \frac{3}{2}\times 2 = \frac{6}{2} = 3$

2. La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $\frac{16}{27}$ et de raison $\frac{3}{2}$; ainsi, le terme u_n de rang n est donnée par la formule explicite suivante :

$u_n = u_0 \cdot q^n = \frac{16}{27}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$

3. La suite S est la somme des termes consécutifs de rang 3 au rang 16 ; ainsi, cette somme comprend $16-3+1=14$ termes. D'après la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, on a la valeur de S :

$$S = u_3 + \cdots + u_{16} = u_3\times\frac{1-q^{14}}{1-q} = 2\times\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{14}}{1-\frac{3}{2}}$$
$$= 2\times\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{14}}{-\frac{1}{2}} = 2\times\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^{14}\right]\times\left(-\frac{2}{1}\right)$$
$$= -4\cdot\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^{14}\right] = 4\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{14}-1\right]$$

Correction 3

a. $\displaystyle\sum_{i=0}^{7} i = 0+1+2+3+4+5+6+7 = 28$

b. $\displaystyle\sum_{i=3}^{8} (i^2-i) = (9-3)+(16-4)+(25-5)+(36-6)$
$+(49-7)+(64-8)$
$= 6+12+20+30+42+56 = 166$

c. $\displaystyle\sum_{i=0}^{7} (i-4) = (0-4)+(1-4)+(2-4)+(3-4)$
$+(4-4)+(5-4)+(6-4)+(7-4)$
$=(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3=-4$

d. $\displaystyle\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{i} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$
$= \frac{60}{60}+\frac{30}{60}+\frac{20}{60}+\frac{15}{60}+\frac{12}{60}+\frac{10}{60} = \frac{147}{60} = \frac{49}{20}$

e. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{i^2} = \frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16} = \frac{144}{144}+\frac{36}{144}+\frac{16}{144}+\frac{9}{144}$
$= \frac{205}{144}$

f. $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{3}\left[\sum_{i=0}^{\ell} i\right] = \left(\sum_{i=0}^{0} i\right)+\left(\sum_{i=0}^{1} i\right)+\left(\sum_{i=0}^{2} i\right)+\left(\sum_{i=0}^{3} i\right)$
$=(0)+(0+1)+(0+1+2)+(0+1+2+3)$
$= 0+1+3+6 = 10$

Correction 4

a. La relation de récurrence est définie pour $n\in\mathbb{N}^*$. Ainsi, cette relation est d'abord définie pour $n=1$ et ainsi, s'écrit :

$u_{1+1} = 2\cdot u_1 - 3$
$u_2 = 2\cdot u_1 - 3$

Ainsi, cette relation permet de définir u_2 mais pas u_1 : cette suite n'est pas définie.

b. Les deux informations suivantes :

$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n - 3$

permettent de connaître la valeur du terme de rang 1. Pour cela, remplaçont dans la formule de récurrence n par 0 :

$$u_{0+1} = u_0 - 3$$
$$u_1 = 1 - 3$$
$$u_1 = -2$$
Or, cette dernière valeur est en contradiction avec la valeur de u_1 donnée dans l'énoncé : la définition de la suite (u_n) n'est pas cohérente.

c. La formule de récurrence de l'énoncé est définie pour $n \in \mathbb{N}$; ainsi, la première valeur prise par n est 0. La formule de récurrence s'écrit alors :
$$u_0 = 2 \cdot u_{0-1} - 2$$
$$u_0 = 2 \cdot u_{-1} - 2$$
L'expression u_{-1} ne définit pas le terme d'une suite numérique.

d. Pour $n=1$, la formule de récurrence donne l'égalité :
$$u_1 = \frac{u_{1-1} - 2}{u_{1-1} + 1} = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \frac{(-1) - 2}{(-1) + 1} = \frac{-3}{0}$$
On vient de montrer que le terme de rang 1 de la suite (u_n) n'est pas définie : la suite n'existe pas.

Correction 5

1. a. La suite (u_n) vérifie les deux propriétés suivantes :
$$u_0 = -5 \quad \left| \quad \begin{aligned} & u_{n+1} - u_n \\ &= \big[-5 + 9 \cdot (n+1)\big] - \big(-5 + 9 \cdot n\big) \\ &= -5 + 9 \cdot n + 9 + 5 - 9 \cdot n = 9 \end{aligned} \right.$$
On vient de montrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme -5 et de raison 9.

b. On a la limite suivante :
$$\lim_{n \mapsto +\infty} u_n = \lim_{n \mapsto +\infty} 9 \cdot n - 5 = +\infty$$

2. a. La suite (v_n) vérifie les deux propriétés suivantes :
$$v_0 = 2 \quad ; \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n}} = \frac{1}{3}$$
Ainsi, la suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{1}{3}$.

b. Ayant l'encadrement $0 \leqslant \frac{1}{3} < 1$, on a la limite :
$$\lim_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$
On en déduit la limite de la suite (v_n) :
$$\lim_{n \mapsto +\infty} v_n = \lim_{n \mapsto +\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

Correction 6

1. La raison de la suite (u_n) étant positif et son premier terme étant négatif, on en déduit que tous les termes de (u_n) sont négatifs.

La raison étant strictement supérieure à 1, on en déduit :
$$\lim_{n \mapsto +\infty} u_n = -\infty$$

2. La raison de la suite (v_n) étant strictement négatif, on en déduit que les termes de cette suite auront des signes alternés.
La valeur absolue de la raison étant strictement supérieure à 1, on en déduit que la suite (v_n) n'est pas convergente.

Prenons pour exemple une suite (v_n) ayant pour premier terme 2. Voici un tableau de valeurs de la suite (v_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6
v_n	2	-6	18	-54	162	-486	1458

3. La raison de la suite (w_n) étant négative, les termes de cette suite ont des signes alternés.
La valeur absolue de la raison étant strictement inférieure à 1, on en déduit que la suite est convergente vers 0.

Prenons pour exemple une suite (w_n) ayant pour premier terme -1. Voici un tableau de valeurs de la suite (w_n) :

n	0	1	2	3	4	5
w_n	-1	0,2	$-0{,}04$	0,008	$-0{,}0016$	0,00032

Correction 7

1. a. Le terme de rang n de la suite (u_n) admet pour expression :
$$u_n = 2 + (-1) \cdot n = 2 - n.$$

b. La somme S_n des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique (u_n) a pour valeur :
$$S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2} = \frac{(n+1)(2 + 2 - n)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(4-n)}{2}$$

c. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{n \mapsto +\infty} n + 1 = +\infty \quad ; \quad \lim_{n \mapsto +\infty} 4 - n = -\infty$$
On en déduit la limite du quotient :
$$\lim_{n \mapsto +\infty} S_n = \lim_{n \mapsto +\infty} \frac{(n+1)(4-n)}{2} = -\infty.$$

2. a. Le terme de rang n de la suite (v_n) admet pour expression :
$$u_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

b. La raison de la suite géométrique (v_n) étant différent de 1, la somme S'_n des $n+1$ premiers termes de la suite (v_n) a pour expression en fonction de n :
$$S'_n = v_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$= 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 10 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

c. Ayant l'encadrement $0 \leqslant \frac{1}{2} < 1$, on a la limite :
$$\lim_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$
On en déduit la limite :
$$\lim_{n \mapsto +\infty} S'_n = \lim_{n \mapsto +\infty} 10 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 10$$

Correction 8

1. La somme S_n comporte $n-3+1 = n-2$ termes.

Son terme de rang 3 vaut :
$$u_3 = 4 \times 5^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{4}{5}$$
La raison de la suite (u_n) géométrique étant différent de 1, la somme de ses n premiers termes s'exprime par :

$$S_n = u_3 + \cdots + u_n = u_3 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5} \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}}{\frac{4}{5}}$$
$$= \frac{4}{5} \times \frac{5}{4} \cdot \left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}\right] = 1 \cdot \left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}\right] = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}$$

2. On a $0 \leqslant \frac{1}{5} < 1$, ainsi on a : $\lim_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

On obtient la limite suivante pour la suite (S_n) :
$$\lim_{n \mapsto +\infty} S_n = \lim_{n \mapsto +\infty} 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} = 1$$

Correction 9

La suite (u_n) étant une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 1, on en déduit la valeur du terme de rang n par la formule explicite suivante :
$$u_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
La somme R_n comprend $(n+1)$ termes de ma suite géométrique (u_n) dont la raison est différente de 1.

Ainsi, la somme R_n admet pour expression :
$$R_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n} = u_n \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] \cdot 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$
Puisque $0 < \frac{1}{2} < 1$, on a les deux limites suivantes :
$$\lim_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \mapsto +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{n \mapsto +\infty} R_n = \lim_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 0$$

Correction 10

1. La somme S est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$ dont voici les premiers termes :
$$u_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_1 = \frac{1}{2} \cdot u_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$u_2 = \frac{1}{2} \cdot u_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad ; \quad \ldots$$
Cette suite est effectué jusqu'au rang $(n-1)$:
$$u_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
La raison de la suite de ces termes étant différente de 1, la somme de ces termes s'expriment par la formule :
$$S = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times 2 \cdot \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{n \mapsto +\infty} S = \lim_{n \mapsto +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

2. On remarque que :
$$S' = -\frac{15}{4} + 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots + 5 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n$$
$$= -\frac{15}{4} + 5 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 5 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots + 5 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n$$
Considérons la suite (u_n) de premier terme 5 et de raison $\left(-\frac{3}{4}\right)$; on a :

- $u_0 = 5$
- $u_1 = 5 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^1 = -\frac{15}{4}$
- $u_2 = 5 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$
- $u_3 = 5 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$
- $u_n = 5 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n$

On reconnait ici les termes de la somme :
$$S' = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$
La raison de la suite géométrique est différent de 1, la somme de ces termes s'expriment par la formule :
$$S' = u_1 \cdot \frac{1-q^{n-1+1}}{1-q} = -\frac{15}{4} \times \frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1-(-\frac{3}{4})}$$
$$= -\frac{15}{4} \times \frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{7}{4}} = \frac{15}{4} \times \frac{4}{7} \times \left[1-\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]$$
$$= -\frac{15}{7} \times \left[1-\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]$$
De l'encadrement $-1 < -\frac{3}{4} < 1$, on en déduit les limites :
$$\lim_{n \mapsto +\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0 \implies \lim_{n \mapsto +\infty} 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^n = 1$$
$$\implies \lim_{n \mapsto +\infty} -\frac{15}{7} \cdot \left[1-\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right] = -\frac{15}{7} \implies S' = -\frac{15}{7}$$

Correction 11

1. Voici les $(n+1)$ premiers termes de la suite :
$$u_0 = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 + 0$$
$$u_1 = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 + 1$$
$$u_2 = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2$$
....
$$u_{n-1} = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + (n-1)$$
$$u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$
Ainsi, la somme S_n peut s'exprimer ainsi :
$$S_n = \left[2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \cdots + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \left[0 + 1 + \cdots + n\right]$$
que l'on peut écrire :
$$= Q_n + P_n$$
où :

- Q_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{1}{2}$.

$$Q_n = 2\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 2\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}$$
$$= 3\times2\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] = 6\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

- P_n est la somme des $(n{+}1)$ premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.
$$P_n = \frac{(n+1)(0+n)}{2} = \frac{n{\cdot}(n+1)}{2}$$

On en déduit l'expression de S_n en fonction de n :
$$S_n = Q_n + P_n = 6\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{n{\cdot}(n+1)}{2}$$

2. Le terme T_n admet pour expression en fonction de n :
$$T_n = \frac{S_n}{n^2} = \frac{6\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]+\frac{n\cdot(n+1)}{2}}{n^2}$$
$$= \frac{6\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]}{n^2} + \frac{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}{n^2}$$
$$= \frac{6\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]}{n^2} + \frac{n{\cdot}(n+1)}{2{\cdot}n^2}$$

Etudions séparemment les limites de ces deux termes :

- Puisque $0<\frac{2}{3}<1$, on en déduit la limite :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} 6\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] = 6$$
On en déduit la limite du premier terme :
$$\lim_{\substack{n\mapsto+\infty\\ n\neq0}} \frac{6\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]}{n^2} = 0$$
- On a la transformation algébrique suivante :
$$\frac{n{\cdot}(n+1)}{2{\cdot}n^2} = \frac{n^2+n}{2{\cdot}n^2} = \frac{n^2}{2{\cdot}n^2} + \frac{n}{2{\cdot}n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2{\cdot}n}$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{n{\cdot}(n+1)}{2{\cdot}n^2} = \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2{\cdot}n} = \frac{1}{2}$$

On en déduit la limite de la suite (T_n) :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} T_n = \lim_{n\mapsto+\infty} Q_n + T_n = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Correction 12

1. Voici un extrait du tableau complété :

	A	B	C	D	E
1	x_n	y_n	w_n		t_n
2	1	12	11		99
3	8,33	9,25	0,92	0,83	99
4	8,94	9,02	0,76	0,83	99
5	9,00	9,00	0,01	0,83	99
6	9,00	9,00	0,00	0,83	99

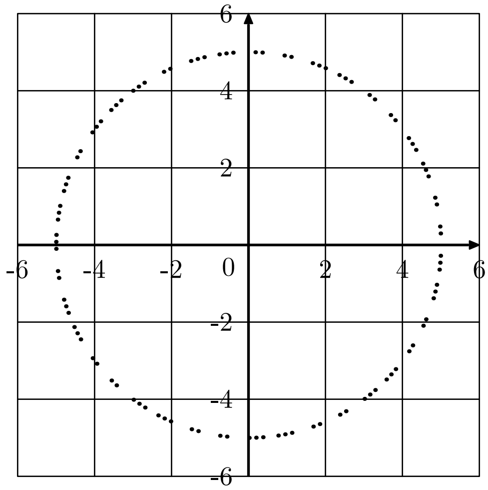
2. (b.) Dans la cellule `D3`, on a saisie la formule `=D3/D2` permettant de connaître le coefficient permettant de passer du terme w_0 au terme w_1.

Les valeurs présentent dans la colonne `D` permettent de conjecturer que la suite (w_n) est une suite géométrique.

3. (b.) L'égalité des termes présents dans la colonne `E` permet de conjecturer la constance de la suite (t_n).

Correction 13

2. Voici la représentation des 100 premiers termes de la suite (M_n) de points.



3. (a.) On peut conjecturer que ces points se situent sur le cercle de centre O et de rayon 5.

(b.) On a la distance suivante :
$$OM_0 = \sqrt{\left(x_M-x_O\right)^2+\left(y_M-y_O\right)^2} = \sqrt{\left(-3-0\right)^2+\left(4-0\right)^2}$$
$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

(c.) Pour établir l'égalité, nous utiliserons la propriété suivante des nombres réels :
$$\left.\begin{array}{l} x\geqslant0 \quad ; \quad y\geqslant0 \\ x^2<y^2 \end{array}\right\} \implies x<y$$
qui pourrait se traduire en français par :
"*Pour deux nombres positifs, deux nombres sont comparés dans le même ordre que leur carré.*"

Les distances étant des nombres positifs, comparons les deux nombres OM_n^2 et ${OM_{n+1}}^2$:

- $${OM_n}^2 = \left(x_{M_n}-x_O\right)^2 + \left(y_{M_n}-y_O\right)^2$$
$$= \left(x_n-0\right)^2 + \left(y_n-0\right)^2 = {x_n}^2 + {y_n}^2$$
- $${OM_{n+1}}^2 = \left(x_{M_{n+1}}-x_O\right)^2 + \left(y_{M_{n+1}}-y_O\right)^2$$
$$= \left(0{,}8{\cdot}x_n - 0{,}6{\cdot}y_n\right)^2 + \left(0{,}6{\cdot}x_n + 0{,}8{\cdot}y_n\right)^2$$
$$= 0{,}64{\cdot}{x_n}^2 - 0{,}48{\cdot}x_n{\cdot}y_n + 0{,}36{\cdot}{x_n}^2$$
$$+0{,}36{\cdot}{x_n}^2 \ + \ 0{,}48{\cdot}x_n{\cdot}y_n \ + \ 0{,}64{\cdot}{y_n}^2$$
$$= {x_n}^2 + {y_n}^2$$

On vient d'établir la relation demandée.

(d.) La phrase à compléter est :

"*Si, pour tout entier naturel, les termes d'une suite vérifie la relation $u_{n+1}=u_n$ alors la suite est constante*"

Ainsi, on vient de prouver la conjecture : les points de la suite (M_n) appartiennent au cercle de centre O et de rayon 5.

Correction 14

1. (a.) Etudions la différence de deux termes consécutifs de la suite (v_n) :
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 10 = \left(0{,}95{\cdot}u_n + 0{,}5\right) - 10 = 0{,}95{\cdot}u_n - 9{,}5$$
$$= 0{,}95{\cdot}\left(u_n - \frac{9{,}5}{0{,}95}\right) = 0{,}95{\cdot}\left(u_n - 10\right) = 0{,}95{\cdot}v_n$$

On vient de montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

Le premier terme de la suite a pour valeur :

$v_0 = u_0 - 10 = 8 - 10 = -2$

b. La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme -2 et de raison $0{,}95$.
La formule explicite des suites géométriques permet d'obtenir l'expression des termes de la suite (v_n) en fonction de n :

$$v_n = -2\times 0{,}95^n$$

2. De la définition de la suite (v_n), on en déduit l'égalité :

$$v_n = u_n - 10$$
$$u_n = v_n + 10$$
$$u_n = -2\times 0{,}95^n + 10$$

3. De l'encadrement $0 \leqslant 0{,}95 < 1$, on a la limite :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} 0{,}95^n = 0$$

On en déduit :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty} -2\times 0{,}95^n + 10 = -2\times 0 + 10 = 10$$

Correction 15

1. a. La définition de la suite (w_n) permet d'écrire la relation :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \big(-3{\cdot}u_n + 4{\cdot}v_n\big) - \big(2{\cdot}u_n - v_n\big)$$
$$= -3{\cdot}u_n + 4{\cdot}v_n - 2{\cdot}u_n + v_n = -5{\cdot}u_n + 5{\cdot}v_n$$
$$= 5{\cdot}\big(v_n - u_n\big) = 5{\cdot}w_n$$

La suite (w_n) est géométrique de raison 5.

b. Le premier terme de la suite (w_n) a pour valeur :

$$w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 5 = -1$$

La formule de l'expression des termes d'une suite géométrique permet d'écrire :

$$w_n = -1\times 5^n = -5^n$$

2. a. Le premier terme de la suite (t_n) a pour valeur :

$$t_0 = 3{\cdot}u_0 + v_0 = 3\times 5 + 4 = 15 + 4 = 19$$

b. On a la relation :

$$t_{n+1} = 3{\cdot}u_{n+1} + v_{n+1} = 3{\cdot}\big(2{\cdot}u_n - v_n\big) + \big(-3{\cdot}u_n + 4{\cdot}v_n\big)$$
$$= 6{\cdot}u_n - 3{\cdot}v_n - 3{\cdot}u_n + 4{\cdot}v_n = 3{\cdot}u_n + v_n = t_n$$

3. D'après les question 1. et 2., on a :

$$\begin{cases} w_n = -5^n \\ t_n = 19 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v_n - u_n = -5^n \\ 3{\cdot}u_n + v_n = 19 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -u_n + v_n = -5^n \\ 3{\cdot}u_n + v_n = 19 \end{cases}$$

Par soustraction de ces deux lignes, on obtient :

$$-u_n - 3{\cdot}u_n = -5^n - 19$$
$$-4{\cdot}u_n = -5^n - 19$$
$$u_n = \frac{-5^n - 19}{-4}$$
$$u_n = \frac{5^n + 19}{4}$$
$$u_n = \frac{5^n}{4} + \frac{19}{4}$$

De la première équation, on obtient :

$$v_n - u_n = -5^n$$
$$v_n = -5^n + u_n$$
$$v_n = -5^n + \frac{5^n}{4} + \frac{19}{4}$$
$$v_n = \frac{-4\times 5^n}{4} + \frac{5^n}{4} + \frac{19}{4}$$
$$v_n = \frac{-3\times 5^n}{4} + \frac{19}{4}$$

4. De l'encadrement $5 > 1$, on a la limite : $\lim_{n\mapsto+\infty} 5^n = +\infty$

On en déduit les limites :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} v_n = -\infty$$

Correction 16

1. • Déterminons l'expression de a_{n+2} :

$$a_{n+2} = 0{,}2{\cdot}a_{n+1} + 1{,}3{\cdot}b_{n+1}$$
$$= 0{,}2{\cdot}\big(0{,}2{\cdot}a_n + 1{,}3{\cdot}b_n\big) + 1{,}3{\cdot}\big(-0{,}8{\cdot}a_n - 0{,}2{\cdot}b_n\big)$$
$$= 0{,}04{\cdot}a_n + 0{,}26{\cdot}b_n - 1{,}04{\cdot}a_n - 0{,}26{\cdot}b_n = -a_n$$

• Déterminons l'expression de b_{n+2} :

$$b_{n+2} = -0{,}8{\cdot}a_{n+1} - 0{,}2{\cdot}b_{n+1}$$
$$= -0{,}8{\cdot}\big(0{,}2{\cdot}a_n + 1{,}3{\cdot}b_n\big) - 0{,}2{\cdot}\big(-0{,}8{\cdot}a_n - 0{,}2{\cdot}b_n\big)$$
$$= -0{,}16{\cdot}a_n - 1{,}04{\cdot}b_n + 0{,}16{\cdot}a_n + 0{,}04{\cdot}b_n = -b_n$$

2. Les termes de la suite (a_{2n}) sont :

$$a_0 = 6$$
$$a_2 = a_{0+2} = -a_0 = -6 \quad ; \quad a_4 = a_{2+2} = -a_2 = 6$$

On observe que les termes de la suite (a_{2n}) sont alternés.

Correction 17

1. Par définition des termes de la suite (v_n), on a :

$$v_{n+1} = 0{,}1{\cdot}u_{n+1} - 0{,}1{\cdot}(n+1) + 0{,}5$$
$$= 0{,}1{\cdot}\big(0{,}5{\cdot}u_n + 0{,}5{\cdot}n - 1{,}5\big) - 0{,}1{\cdot}n - 0{,}1 + 0{,}5$$
$$= 0{,}05{\cdot}u_n + 0{,}05{\cdot}n - 0{,}15 - 0{,}1{\cdot}n + 0{,}4$$
$$= 0{,}05{\cdot}u_n - 0{,}05{\cdot}n + 0{,}25 = 0{,}5{\cdot}\Big(\frac{0{,}05}{0{,}5}{\cdot}u_n - \frac{0{,}05}{0{,}5}{\cdot}n + \frac{0{,}25}{0{,}5}\Big)$$
$$= 0{,}5{\cdot}\big(0{,}1{\cdot}u_n - 0{,}1{\cdot}n + 0{,}5\big) = 0{,}5{\cdot}v_n$$

On vient d'établir que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}5$.
Son premier terme a pour valeur :

$$v_0 = 0{,}1{\cdot}u_0 - 0{,}1\times 0 + 0{,}5 = 0{,}1\times 5 - 0 + 0{,}5$$
$$= 0{,}5 + 0{,}5 = 1$$

Ainsi, les termes de la suite (v_n) ont pour expression en fobnction de n :

$$v_n = 1\times 0{,}5^n$$

2. De la définition des termes de la suite (u_n), on a :

$$v_n = 0{,}1{\cdot}u_n - 0{,}1{\cdot}n + 0{,}5$$
$$v_n + 0{,}1{\cdot}n - 0{,}5 = 0{,}1{\cdot}u_n$$
$$u_n = 10{\cdot}\big(v_n + 0{,}1{\cdot}n - 0{,}5\big)$$
$$u_n = 10{\cdot}v_n + n - 5$$
$$u_n = 10{\cdot}0{,}5^n + n - 5$$

3. De l'encadrement $0 \leqslant 0{,}5 < 1$, on en déduit :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} 0{,}5^n = 0.$$

On a les limites suivantes : $\begin{cases} \lim\limits_{n\mapsto+\infty} 10\times 0{,}5^n = 0 \\ \lim\limits_{n\mapsto+\infty} n = +\infty \end{cases}$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty} 10\times 0{,}5^n + n - 5 = +\infty$$

Correction 18

1. Voici les cinq premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = 0$
- $u_1 = 1$
- $u_2 = 7{\cdot}u_1 + 8{\cdot}u_0 = 7\times 1 + 8\times 0 = 7 + 0 = 7$
- $u_3 = 7{\cdot}u_2 + 8{\cdot}u_1 = 7\times 7 + 8\times 1 = 49 + 8 = 57$

- $u_4 = 7\cdot u_3 + 8\cdot u_2 = 7\times 57 + 8\times 7 = 399 + 56$
$= 455$

2. La formule de récurrence de la suite (u_n) permet d'écrire la relation suivante :
$u_{n+2} = 7\cdot u_{n+1} + 8\cdot u_n$

Par définition de la suite (s_n), on peut écrire :
$s_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = \big(7\cdot u_{n+1} + 8\cdot u_n\big) + u_{n+1}$
$= 8\cdot u_{n+1} + 8\cdot u_n = 8\cdot\big(u_{n+1} + u_n\big) = 8\cdot s_n$

La relation précédente montre que la suite (s_n) est une suite géométrique de raison 8.

Par définition des termes de la suite (s_n), son premier terme a pour valeur :
$s_0 = u_1 + u_0 = 1 + 0 = 1$

Ainsi, on obtient l'expression des termes de la suite (u_n) géométrique de premier terme 1 et de raison 8 en fonction de n :
$s_n = s_0 \cdot q^n = 1\times 8^n = 8^n$

3. a. Pour tout entier naturel n, on a la relation :
$t_n = v_{n+1} - v_n = (-1)^{n+1}\cdot u_{n+1} - (-1)^n\cdot u_n$
$= (-1)^{n+1}\cdot u_{n+1} + (-1)^{n+1}\cdot u_n$
$= (-1)^{n+1}\cdot\big(u_{n+1} + u_n\big) = (-1)^{n+1}\cdot s_n$

b. La suite (s_n) étant géométrique de raison 8, on a :
$s_n = s_0\cdot q^n = s_0\cdot 8^n$
Ainsi, on peut exprimer les termes de la suite (t_n) par :
$t_n = (-1)^{n+1}\cdot s_n = (-1)^{n+1}\cdot s_0\cdot 8^n$
$= (-1)^n\cdot(-s_0)\cdot 8^n = (-1\times 8)^n\cdot(-s_0)$
$= (-8)^n\cdot(-s_0)$
Cette dernière expression montre que la suite (t_n) est une suite géométrique de premier terme $-s_0$ et de raison -8.

4. a. Les deux prermiers termes de la suite (v_n) ont pour valeur : $v_0 = (-1)^0\cdot u_0 = 0$; $v_1 = (-1)^1\cdot u_1 = -1$
On en déduit la valeur du premier terme de la suite (t_n) :
$t_0 = v_1 - v_0 = -1$
Notons T_n la somme : $T_n = t_0 + t_1 + \cdot + t_{n-2} + t_{n-1}$

- $T_n = t_0 + t_1 + \cdot + t_{n-2} + t_{n-1}$
qui peut s'écrire :
$= \big(v_1 - v_0\big) + \big(v_2 - v_1\big) + \cdots + \big(v_{n-1} - v_{n-2}\big) + \big(v_n - v_{n-1}\big)$
$= -v_0 + v_n$
- La suite (t_n) est une suite géométrique de premier terme -1 et de raison -8. On en déduit l'expression de la somme T_n :
$T_n = t_0\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q} = -1\times\dfrac{1-(-8)^n}{1-(-8)}$
$= -1\times\dfrac{1-(-8)^n}{1+8} = -1\times\dfrac{1-(-8)^n}{9}$
$= -\dfrac{1}{9}\cdot\big[1-(-8)^n\big]$

Des deux expressions de la somme T_n, on en déduit l'égalité :

$$-v_0 + v_n = -\frac{1}{9}\cdot\big[1-(-8)^n\big]$$
$$v_n = -\frac{1}{9}\cdot\big[1-(-8)^n\big] + v_0$$
$$v_n = -\frac{1}{9}\cdot\big[1-(-8)^n\big] + 0$$
$$v_n = -\frac{1}{9} + \frac{(-8)^n}{9}$$

On en déduit l'expression des termes de la suite (u_n) :
$v_n = (-1)^n\cdot u_n$
$(-1)^n\cdot v_n = \big[(-1)^n\big]^2\cdot u_n$
$(-1)^n\cdot v_n = 1\cdot u_n$
$u_n = (-1)^n\cdot v_n$
$u_n = (-1)^n\cdot\Big[-\dfrac{1}{9} + \dfrac{(-8)^n}{9}\Big]$
$u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{9} + \dfrac{(-1)^n\cdot(-8)^n}{9}$
$u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{9} + \dfrac{8^n}{9}$

b. On a les transformations algébriques suivantes :
$$\frac{u_n}{8^n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{9} + \dfrac{8^n}{9}}{8^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{9\times 8^n} + \frac{8^n}{9\times 8^n}$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{9\times 8^n} + \frac{1}{9}$$
En remarquant l'encadrement suivant pour tout entier naturel n :
$-1 \leqslant (-1)^{n+1} \leqslant 1$
$\dfrac{-1}{9\times 8^n} \leqslant \dfrac{(-1)^{n+1}}{9\times 8^n} \leqslant \dfrac{1}{9\times 8^n}$
et les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{-1}{9\times 8^n} = 0$; $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{1}{9\times 8^n} = 0$
Le théorème des gendarmes permet d'obtenir la limite suivante :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{9\times 8^n} = 0$
On en déduit :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{u_n}{8^n} = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{9\times 8^n} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{9}$

Correction 19

a. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n^3 = +\infty$; $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 5^n = +\infty$
On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n^3\times 5^n = +\infty$

b. On a les deux limites suivantes :
- $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n = +\infty$
- Puisque $0 \leqslant \dfrac{2}{7} < 1$, on a : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \Big(\dfrac{2}{7}\Big)^n = 0$

On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n - \Big(\dfrac{2}{7}\Big)^n = +\infty$

c. On a les deux limites suivantes :
- Puisque $0 \leqslant \dfrac{1}{3} < 1$, on a : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \Big(\dfrac{1}{3}\Big)^n = 0$
- Puisque $\dfrac{3}{2} > 1$, on a : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \Big(\dfrac{3}{2}\Big)^n = +\infty$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{3}{2}\right)^n=-\infty$$

d. On a la transformation algébrique suivante :

$$8^n-3^n=8^n\cdot\left(1-\frac{3^n}{8^n}\right)=8^n\cdot\left[1-\left(\frac{3}{8}\right)^n\right]$$

On a les deux limites suivantes :

- Puisque $8>1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}8^n=+\infty$
- Puisque $0\leqslant\frac{3}{8}<1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}1-\left(\frac{3}{8}\right)^n=1$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}8^n-3^n=\lim_{n\mapsto+\infty}8^n\cdot\left[1-\left(\frac{3}{8}\right)^n\right]=+\infty$$

e. On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{5^n-2^n}{3^n+2^n}=\frac{5^n\cdot\left(1-\frac{2^n}{5^n}\right)}{3^n\cdot\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)}=\frac{5^n}{3^n}\cdot\frac{1-\frac{2^n}{5^n}}{1+\frac{2^n}{3^n}}$$

$$=\left(\frac{5}{3}\right)^n\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

On a les deux limites suivantes :

- Puisque $\frac{5}{3}>1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n=+\infty$
- Puisque $0\leqslant\frac{2}{5}<1$ et $0\leqslant\frac{2}{3}<1$, on a :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0\quad;\quad\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$
On en déduit la limite : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{5^n-2^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=+\infty$$

f. On a les transformations algébriques suivantes :

$$\left(\frac{31}{7}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^n=\left(\frac{31}{7}\times\frac{2}{8}\right)^n=\left(\frac{62}{56}\right)^n$$

De la comparaison $\frac{62}{56}>1$, on en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{31}{7}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^n=\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{62}{56}\right)^n=+\infty$$

Correction 20

a. On utilise la transformation algébrique suivante :

$$n^5\times\left(\frac{3}{n^2}\right)^3=n^5\times\frac{27}{n^6}=\frac{27}{n}$$

Ainsi, on a la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}n^5\times\left(\frac{3}{n^2}\right)^3=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{27}{n}=0$$

b. On a la transformation algébrique suivante :

$$5^n-8^n=8^n\cdot\left(\frac{5^n}{8^n}-1\right)=8^n\cdot\left[\left(\frac{5}{8}\right)^n-1\right]$$

On a les limites suivantes :

- Puisque $8>1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}8^n=+\infty$
- Puisque $0\leqslant\frac{5}{8}<1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{5^n}{8^n}-1=-1$

On en déduit la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}5^n-8^n=\lim_{n\mapsto+\infty}8^n\left[\left(\frac{5}{8}\right)^n-1\right]=-\infty$$

c. Utilisons la transformation algébrique suivante :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n+2}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2$$
$$=\left[\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)\right]^n\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{8}{9}\right)^n\cdot\frac{16}{9}$$

Puisque $0\leqslant\frac{8}{9}<1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n=0$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n+2}=\left(\frac{8}{9}\right)^n\cdot\frac{16}{9}=0$$

d. On a la transformation algébrique suivante :

$$\frac{3^n-2^n}{5^n-4^n}=\frac{3^n\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{5^n\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]}=\frac{3^n}{5^n}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)^n\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

On a les limites suivantes :

- Puisque $0\leqslant\frac{3}{5}<1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0$
- Puisque $0\leqslant\frac{2}{3}<1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}1-\left(\frac{2}{3}\right)^n=1$
- Puisque $0\leqslant\frac{4}{5}<1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}1-\left(\frac{4}{5}\right)^n=1$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{3^n-2^n}{5^n-4^n}=\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}=0$$

Correction 21

1. Pour chaque terme de cette somme, il existe un entier $k\in\mathbb{N}^*$ tel que ce terme s'écrive :
$$\frac{1}{n+\sqrt{k}}$$
Ainsi, pour un entier n et pour k un entier vérifiant l'encadrement $1\leqslant k\leqslant n$, on a :
$$\begin{aligned}1\leqslant\ &k\ \leqslant n\\ \sqrt{1}\leqslant\ &\sqrt{k}\ \leqslant\sqrt{n}\\ 0\leqslant n+\sqrt{1}\leqslant\ &n+\sqrt{k}\ \leqslant n+\sqrt{n}\end{aligned}$$
La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\frac{1}{n+\sqrt{1}}\geqslant\frac{1}{n+\sqrt{k}}\geqslant\frac{1}{n+\sqrt{n}}$$
$$\frac{1}{n+\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{n+\sqrt{k}}\leqslant\frac{1}{n+\sqrt{1}}$$
L'inégalité ci-dessus encadre chaque terme de la somme ; or, cette somme comporte n terme, ainsi on a l'encadrement suivant :
$$n\cdot\frac{1}{n+\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\leqslant n\cdot\frac{1}{n+\sqrt{1}}$$
$$\frac{n}{n+\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\leqslant\frac{n}{n+\sqrt{1}}$$

2. Déterminons les deux limites suivantes :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{n}{n+1}\quad;\quad\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}$$

- Pour $n>0$, on a la transformation algébrique suivante :
$$\frac{n}{n+1}=\frac{n}{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}1=1\quad;\quad\lim_{n\mapsto+\infty}1+\frac{1}{n}=1$$
On en déduit la valeur de la limite suivante :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

- La forme indéterminée de la limite nous impose les transformations suivantes :
$$\frac{n}{n+\sqrt{n}}=\frac{n}{n\cdot\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n}\right)}=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}}}$$
$$=\frac{1}{1+\frac{n}{n\cdot\sqrt{n}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$
Ainsi, on a la limite suivante :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$$

Avec l'aide de l'encadrement obtenu à la question 1. et du théorème des gendarmes, on obtient la limite suivante :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}=1$$

Correction 22

1. On a les transformations algébriques suivantes :
$$u_n=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}$$
Le facteur $\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}$ est non-nul :
$$=\frac{\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}\right)\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}\right)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{2n+1}\right)^2-\left(\sqrt{2n}\right)^2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}=\frac{(2n+1)-2n}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$$

2. Pour tout entier naturel n, on a la comparaison :
$$2n<2n+1$$
La fonction racine carrée est strictement croissante :
$$\sqrt{2n}<\sqrt{2n+1}$$
$$\sqrt{2n}+\sqrt{2n}<\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}$$
$$2\cdot\sqrt{2n}<\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}$$
L'étude étant pour n non-nul :
$$0<2\cdot\sqrt{2n}<\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}$$
La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{2n}}>\frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}}$$
L'étude étant pour n non-nul :
$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{2n}}>\frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}}>0$$
$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{2n}}>u_n>0$$

3. De la limite $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{2\cdot\sqrt{2n}}=0$ et du théorème des gendarmes, on en déduit la limite de la suite (u_n) :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=0$$

Correction 23

a. Pour tout entier naturel n non-nul, on a les transformations algébriques suivantes :
$$\frac{2n^2-3n+1}{n+1}=\frac{n^2\cdot\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{n\cdot\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{1}{n}}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}n\cdot\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=+\infty\quad;\quad\lim_{n\mapsto+\infty}1+\frac{1}{n}=1$$
On en déduit la limite du quotient :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{n\cdot\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{1}{n}}=+\infty$$

b. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a les transformations algébriques :
$$\frac{n-3}{n^2+1}=\frac{n\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)}{n^2\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1-\frac{3}{n}}{n\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}1-\frac{3}{n}=1\quad;\quad\lim_{n\mapsto+\infty}n\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=+\infty$$
On en déduit la limite du quotient :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1-\frac{3}{n}}{n\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=0$$

c. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a les transformations algébriques :
$$u_n=\frac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1}=\frac{\sqrt{n}\cdot\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=\frac{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}2+\frac{1}{\sqrt{n}}=2\quad;\quad\lim_{n\mapsto+\infty}1+\frac{1}{\sqrt{n}}=1$$
On en déduit la limite du quotient :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{2}{1}=2$$

d. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a la transformation algébrique suivante :
$$1+n-2n^2+3n^3=n^3\cdot\left(\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+3\right)$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}n^3=+\infty\quad;\quad\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+3=3$$
On en déduit la limite du produit :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=\lim_{n\mapsto+\infty}n^3\cdot\left(\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+3\right)=+\infty$$

Correction 24

a. On a la limite : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}n^2=+\infty$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}n^2+2=+\infty$

b. On a la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{n}=0$

On en déduit : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}2+\frac{1}{2}=2$

c. On a les limites :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n^3=+\infty$; $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n=+\infty$

On en déduit : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n^3+n+2=+\infty$

d. On a les limites :

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n=+\infty$; $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{n}=0$

On en déduit : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n-\frac{1}{n}=+\infty$

e. On a les limites :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n=+\infty$; $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n-10=+\infty$

On en déduit : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n\cdot\big(n-10\big)=+\infty$

f. On a les limites :

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}1+\frac{1}{n}=1$; $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n+1=+\infty$

On en déduit : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{n+1}=0$

Correction 25

a. On a la factorisation :
$n^2-n=n\cdot\big(n-1\big)$

On a les deux limites :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n=+\infty$; $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n-1=+\infty$

On en déduit la limite :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n^2-n=\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n\cdot\big(n-1\big)=+\infty$

b. Pour $n\neq0$, on a la factorisation :

$$\frac{n^2+n+1}{n}=\frac{n\cdot\Big(n+1+\frac{1}{n}\Big)}{n}=n+1+\frac{1}{n}$$

On a les deux limites :

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n=+\infty$; $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{n}=0$

On en déduit la limite :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\dfrac{n^2+n+1}{n}=\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n+1+\frac{1}{n}=+\infty$

c. On a les deux limites :

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{n^2}=0$; $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{n}=0$

On en déduit la limite :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}=0$

d. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a la factorisation :

$$\frac{n}{n^2+n+1}=\frac{n}{n\cdot\Big(n+1+\frac{1}{n}\Big)}=\frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}$$

On a les deux limites :

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n=+\infty$; $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{n}=0$

On en déduit la limite du dénominateur :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n+1+\frac{1}{n}=+\infty$

On en déduit la limite :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\dfrac{n}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\dfrac{1}{n+1+\frac{1}{n}}=0$

e. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a la factorisation :

$$\frac{2n^2+n+1}{n-2}=\frac{n^2\cdot\Big(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)}{n\cdot\Big(1-\frac{2}{n}\Big)}=\frac{n\cdot\Big(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)}{1-\frac{2}{n}}$$

Etudions la limite du numérateur :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n=+\infty$; $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}=2$

On en déduit : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}n\cdot\Big(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)=+\infty$

Le dénominateur admet pour limite :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\dfrac{1}{1-\frac{2}{n}}=1$

On en déduit la limite :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{2n^2+n+1}{n-2}=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{n\cdot\Big(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)}{1-\frac{2}{n}}=+\infty$$

f. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a les transformations algébriques :

$$\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}=\frac{\sqrt{n^2\cdot\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)}}{n}=\frac{|n|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{n}$$

Les valeurs de n sont positives :

$$=\frac{n\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{n}=\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$$

On a la limite suivante :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}1-\frac{1}{n^2}=1$

On en déduit la limite :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n}=\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}=\sqrt{1}=1$

