TD - Suites et Récuurences - Terminale spé maths

Exercice 1*

Soit (u_n) une suite définie par :

$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$: $\quad u_n \geqslant 0$.

2. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

   a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

   b. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :
   $$u_n = \frac{25}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}\cdot n - \frac{21}{4}$$

Exercice 2*

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 2\cdot n + 2 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) :
$v_n = u_{n+1} - u_n$

1. a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n.

   b. Justifier que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 et dont on précisera le premier terme.

2. On définit la suite (S_n) par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

   Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :
   $S_n = (n+1)(n+2) \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 3

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$$x^n - 1 = (x-1)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right)$$

Exercice 4*

La suite (u_n) est définit par $u_0 = 13$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}\cdot u_n + \frac{4}{5}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel :
$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 5*

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_1 = 0{,}1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{3}{5} \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\quad u_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

3. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on :
$$\frac{3}{4} - u_n < 10^{-7}$$

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + 4 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est majorée par 7.

2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 7*

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$u_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2\cdot n}\cdot u_n \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.

   b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

   c. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $\quad v_n = \frac{u_n}{n}$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :
   $$u_n = \frac{n}{2^n}$$

Exercice 8*

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}\cdot u_n + 3\times 0{,}5^n \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. a. Déterminer la valeur du terme u_1.

   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel non-nul n, on a :
   $$u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :
$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 9

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + n - 2 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$:
$u_n \geqslant 0$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$:
$u_n \geqslant n - 3$

c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 10*

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2. a. Etablir, par un raisonnement par récurrence, l'inégalité suivante pour tout entier naturel n :
$u_n > n^2$

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 11*

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{2}{x}\right)$$

On admet que la fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	$\sqrt{2}$	↗ $+\infty$

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$u_n \geqslant \sqrt{2}$

2. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$: $f(x) \leqslant x$.

3. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

4. Prouver que la suite (u_n) converge.

Exercice 12*

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(u_n + \dfrac{5}{u_n}\right) \quad \text{pour tout entier naturel } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n > 0$

2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n - \sqrt{5} \geqslant 0$

3. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n non-nul l'inégalité suivante :
$u_n - \sqrt{5} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$

4. Déduire des questions précédentes la convergence de la suite (u_n) et sa limite.

Exercice 13*

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_0 = 1 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$0 < v_n < 3$

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$$v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$$

b. En déduire que la suite (v_n) est croissante.

3. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Exercice 14*

On considère la suite définie par les relations :
$u_0 = 3 \;;\; u_1 = 8 \;;\; u_{n+1} = 5 \cdot u_n - 6 \cdot u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1. Déterminer les valeurs des termes u_2 et u_3.

2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n non-nul, on a :
$u_n = 2^n + 2 \times 3^n$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 15

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{3 \cdot u_n}{1 + 2 \cdot u_n}$

1. a. Calculer u_1 et u_2.

b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n : $u_n < 1$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Démontrer que la suite (u_n) converge. *(on ne demande pas la valeur de la limite).*

Exercice 16*

1. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ pour tout entier naturel n :
$\mathcal{P}_n$: "pour tout nombre réel x tel que $x > 0$:
$(1 + x)^n \geqslant 1 + n \cdot x$"

Cette relation s'appelle l'inégalité de Bernoulli

2. Montrer que pour tout nombre réel q tel que $q \in]1\,;+\infty[$, on a la limite :
$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} q^n = +\infty$

