Exercice 1*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x\cdot e^{x^2-1}$

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f.

1. a. Montrer que pour tout réel x :
$f'(x)=\big(2\cdot x^2+1\big)\cdot e^{x^2-1}$

   b. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que pour tout réel x :
$f''(x)=2x\cdot\big(2\cdot x^2+3\big)\cdot e^{x^2-1}$
Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Exercice 2

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $\big[-2\,;4\big]$ par : $f(x)=\big(x+2\big)\cdot e^{-x+1}$

On note f' la fonction dérivée de f.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $\big[-2\,;4\big]$, on a :
$f'(x)=-\big(x+1\big)\cdot e^{-x+1}$

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	factoriser(dériver$\big[-(x+1)*\exp(-x+1)\big]$) $x*\exp\,(-x+1)$
2	intégrer$\big[(x+2)*\exp(-x+1)\big]$ $-(x+3)*\exp\,(-x+1)$

En utilisant ces résultats, répondre à la question suivante :

Déterminer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe. Justifier.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\big]0\,;10\big]$ par :
$f(x)=-x\cdot\ln\,(x)+2\cdot x+1$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère.

Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $\big]0\,;\,10\big]$.

Exercice 4*

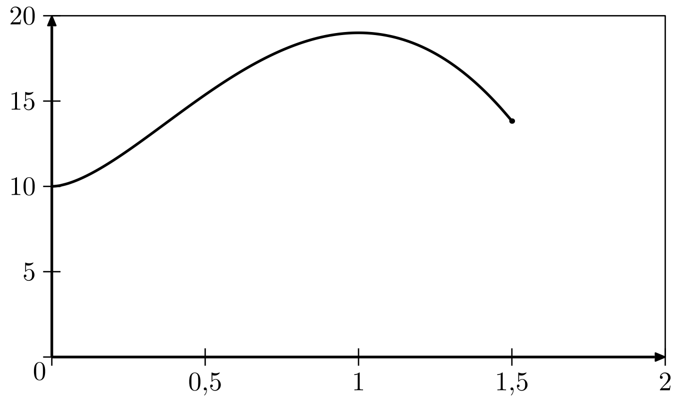
On considère la fonction f définie sur $\big]0\,;+\infty\big[$ par :
$f(x)=3\cdot x-3\cdot x\cdot\ln(x)$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Quelle est la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T?

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\big]0\,;15\big]$ par :
$f(x)=9\cdot x^2\cdot\big(1-2\cdot\ln x\big)+10$.
La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



On admet que $f''(x)=-36\cdot\ln x-36$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $\big]0\,;1{,}5\big]$.

Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1}.

Exercice 6*

On admet que la fonction f est définie par :
$f(x)=\big(x^2-2\cdot x+1\big)\cdot e^{-2x+6}$

A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés :

L1	`f(x):=(x^2-2x+1)*e^(-2x+6)` $\to f(x)=\big(x^2-2\cdot x+1\big)\cdot e^{-2x+6}$
L2	`f'(x):=Dérivée[f(x)]` $\to f'(x)=\big(-2\cdot x^2+6\cdot x-4\big)\cdot e^{-2x+6}$
L3	`g(x):=Dérivée[f'(x)]` $\to g(x)=-16\cdot x\cdot e^{-2x+6}+4\cdot x^2\cdot e^{-2x+6}+14\cdot e^{-2x+6}$
L4	`Factoriser[g(x)]` $\to 2\cdot e^{-2x+6}\cdot\big(2\cdot x^2-8\cdot x+7\big)$
L5	`Résoudre[g(x)=0]` $\to\Big\{x=\dfrac{-\sqrt{2}+4}{2}\,;\,x=\dfrac{\sqrt{2}+4}{2}\Big\}$
L6	`F(x):=Primitive[f(x)]` $\to F(x)=\dfrac{1}{4}\cdot\big(-2\cdot x^2+2\cdot x-1\big)\cdot e^{-2\cdot x+6}$

1. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave.

2. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion?
Si oui, en donner l'abscisse.

Exercice 7*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$ par :

$f(x)=6-\dfrac{5}{x+1}$

1. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$.

2. Résoudre dans l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$, l'équation $f(x)=x$.
On note a l'unique solution de cette équation.

3. Montrer que si x appartient à l'intervalle $\big[0\,;a\big]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $\big[0\,;a\big]$.

