Correction 1

1. (a.) L'expression de la fonction f est donnée sous la forme des produits u et v définies par :
$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{x^2-1}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = 2{\cdot}x{\cdot}\mathrm{e}^{x^2-1}$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) = 1{\cdot}\mathrm{e}^{x^2-1} + x{\cdot}\big(2{\cdot}x{\cdot}\mathrm{e}^{x^2-1}\big)$$
$$= \mathrm{e}^{x^2-1} + 2{\cdot}x^2{\cdot}\mathrm{e}^{x^2-1} = \big(1+2{\cdot}x^2\big){\cdot}\mathrm{e}^{x^2-1}$$

(b.) Les facteurs $1+2{\cdot}x^2$ et e^{x^2-1} étant strictement positifs sur $\mathbb{R}$, on en déduit que le signe de la fonction f' :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	

Ainsi, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Les facteurs $2{\cdot}x^2{+}3$ et e^{x^2-1} étant strictements positifs sur $\mathbb{R}$, on en déduit le tableau de signes de la fonction f'' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	+	

La fonction f est dérivable deux fois et sa dérivée seconde est positive sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$: la fonction f est convexe sur $\big[0\,;+\infty\big[$.

Correction 2

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$u(x) = x+2 \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{-x+1}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x+1}$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) = 1{\cdot}\mathrm{e}^{-x+1} + \big(x{+}2\big){\cdot}\big({-}\mathrm{e}^{-x+1}\big)$$
$$= \mathrm{e}^{-x+1} + \big({-}x-2\big){\cdot}\mathrm{e}^{-x+1} = \big(1+{-}x-2\big){\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}$$
$$= \big({-}x-1\big){\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}$$

2. Le premier résultat du logiciel de calcul formel permet d'obtenir l'égalité :
$f''(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}$
La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit le signe de la fonction f'' :

x	-2		0		4
$f''(x)$		$-$	0	+	

La fonction f étant dérivable deux fois et la fonction f'' étant positive sur $\big[0\,;4\big]$, on en déduit que la fonction f est convexe sur $\big[0\,;4\big]$.

Correction 3

- L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$f(x) = u(x){\cdot}v(x) + 2{\cdot}x + 1$
où les fonctions u et v sont définies par :
$u(x) = -x \quad ; \quad v(x) = \ln\big(x\big)$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = -1 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{x}$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) + 2 + 0$$
$$= -1{\cdot}\ln\big(x\big) + \big({-}x\big){\cdot}\frac{1}{x} + 2 = -\ln\big(x\big) - 1 + 2$$
$$= -\ln\big(x\big) + 1$$
- La fonction f'' dérivée seconde de la fonction f admet pour expression :
$$f''(x) = -\frac{1}{x} + 0 = -\frac{1}{x}$$
On en déduit que la fonction f est concave sur l'intervalle $\big]0\,;10\big]$: toutes ses tangentes se situent au dessus de la courbe représentive de la fonction f.

Correction 4

L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$f(x) = 3{\cdot}x - u(x){\cdot}v(x)$
où les fonctions u et v sont définies par :
$u(x) = 3{\cdot}x \quad ; \quad v(x) = \ln(x)$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 3 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{x}$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = 3 - \big[u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x)\big]$$
$$= 3 - \Big[3{\cdot}\ln\big(x\big) + 3{\cdot}x{\times}\frac{1}{x}\Big] = 3 - \Big[3{\cdot}\ln\big(x\big) + 3\Big]$$
$$= 3 - 3{\cdot}\ln\big(x\big) - 3 = -3{\cdot}\ln\big(x\big)$$
Ainsi, la dérivée seconde f'', dérivée de la fonction f', a pour expression :
$$f''(x) = 3{\times}\Big({-}\frac{1}{x}\Big) = -\frac{3}{x}$$
La dérivée seconde de la fonction f étant strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la fonction f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, toutes les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ se situe au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$. Il en est de même de la tangente T.

Correction 5

Etudions le signe de la dérivée seconde de la fonction f :
$$f''(x) \geqslant 0$$
$$-36{\cdot}\ln x - 36 \geqslant 0$$
$$-36{\cdot}\ln x \geqslant 36$$
$$\ln x \leqslant \frac{36}{-36}$$
$$\ln x \leqslant -1$$
La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$:
$$\mathrm{e}^{\ln x} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$$
$$x \leqslant \mathrm{e}^{-1}$$
Ainsi, la fonction f'' dérivée seconde de la fonction f admet le tableau de signes :

x	$-\infty$		e^{-1}		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction f est dérivable deux fois et sa dérivée seconde change de signe en e^{-1} : la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion au point d'abscisse e^{-1}.

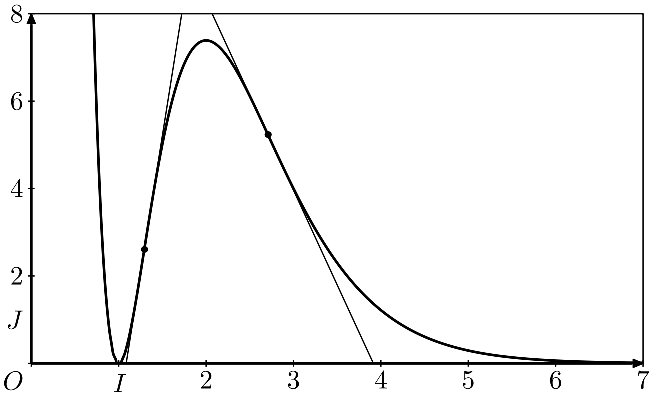
Correction 6

1. D'après les résultats du logiciel de calcul formel, on a :
$$f''(x) = -16{\cdot}x{\cdot}e^{-2x+6} + 4{\cdot}x^2{\cdot}e^{-2x+6} + 14{\cdot}e^{-2x+6}$$
$$= 2{\cdot}e^{-2x+6}{\cdot}\big(2{\cdot}x^2 - 8{\cdot}x + 7\big)$$
D'après le logiciel de calcul formel, l'équation $f''(x)=0$ a pour ensemble de solutions :
$$\mathcal{S} = \Big\{\frac{-\sqrt{2}+4}{2}\,;\,\frac{\sqrt{2}+4}{2}\Big\}$$
Or, le facteur $2{\cdot}e^{-2\cdot x+6}$ étant strictement positif et donc non-nul, on en déduit que les élèments de $\mathcal{S}$ sont les racines du polynôme $2{\cdot}x^2-8{\cdot}x+7$. Le coefficient du terme du second degré de ce polynôme étant strictement positif, on obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{2}+4}{2}$		$\frac{\sqrt{2}+4}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'intervalle $\Big[\frac{-\sqrt{2}+4}{2}\,;\,\frac{\sqrt{2}+4}{2}\Big]$ est le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave car la dérivée seconde de la fonction f est négatif sur cet intervalle.

2. La courbe représentative de la fonction f admet des points d'inflexion lorsque le signe de la fonction dérivée seconde change de signe. D'après la question précédente, la courbe de la fonction f admet deux points d'inflexion dont les abscisses sont :
$$x_1 = \frac{-\sqrt{2}+4}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}+4}{2}$$



Correction 7

1. La fonction f admet pour dérivée :
$$f'(x) = 0 - \Big[-\frac{5}{(x+1)^2}\Big] = \frac{5}{(x+1)^2}$$
On en déduit que la dérivée de la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2. Résolvons l'égalité suivante :
$$f(x) = x$$
$$6 - \frac{5}{x+1} = x$$
$$6 - \frac{5}{x+1} - x = 0$$
$$\frac{6{\cdot}(x+1) - 5 - x{\cdot}(x+1)}{x+1} = 0$$
$$\frac{6x+6-5-x^2-x}{x+1} = 0$$
$$\frac{-x^2+5x+1}{x+1} = 0$$
Pour qu'un quotient soit nul, il faut que son numérateur soit nul ; étudions le numérateur de ce quotient. Ce polynôme du second degré a pour discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 5^2 - 4{\cdot}(-1){\cdot}1 = 25+4 = 29$$
Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-5-\sqrt{29}}{2{\cdot}(-1)} = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-5+\sqrt{29}}{2{\cdot}(-1)} = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$$
Or, de ces deux valeurs, seule $\frac{5+\sqrt{29}}{2}$ appartient à l'intervalle $[0\,;+\infty[$; ainsi, on a :
$$\mathcal{S} = \Big\{\frac{5+\sqrt{29}}{2}\Big\}$$
Notons a cette valeur.

3. Soit $x\in[0\,;a]$; on a l'encadrement suivant :
$$0 \leqslant x \leqslant a$$
La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
$$f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(a)$$
a est solution de l'équation $f(x)=x$
$$1 \leqslant f(x) \leqslant a$$
On en déduit :
$$a\in[0\,;a] \implies f(a)\in[1\,;a]\subset[0\,;a]$$

