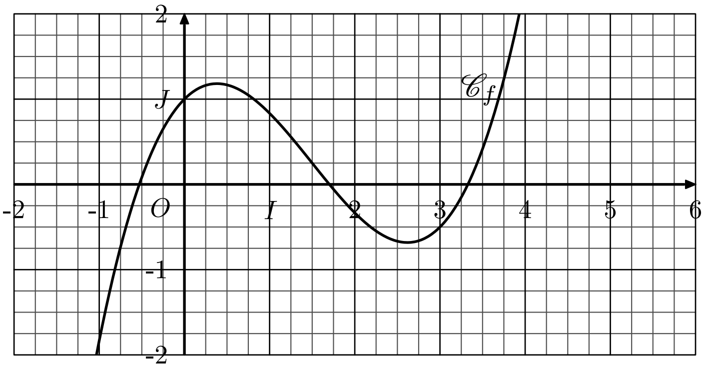
Exercice 1*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{3}{2}\cdot x^2 + x + 1$$

On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :

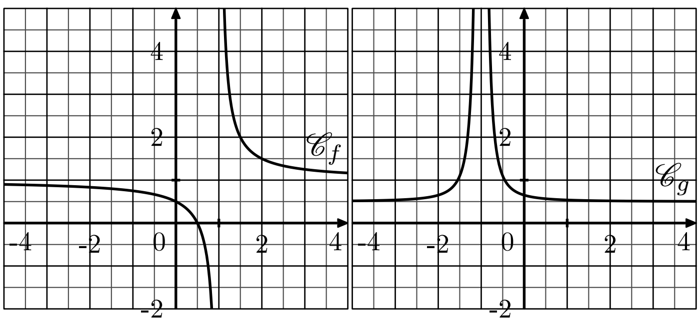


On note (Δ) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

1. a. Déterminer les coordonnées du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 3.
   b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (Δ).
   c. Tracer dans le repère la droite (Δ).
2. Déterminer, algébriquement, l'équation réduite de la droite (Δ).

Exercice 2

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé dans lequel sont représentées les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g :



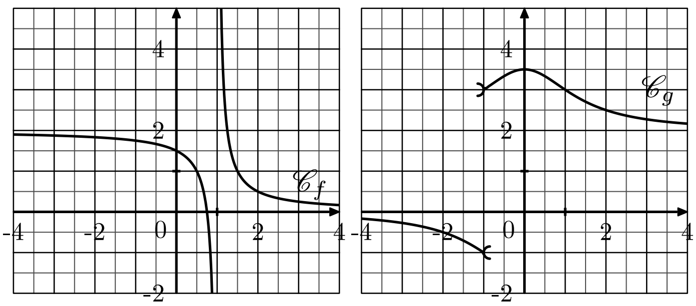
Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)$ e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$ f. $\lim\limits_{x\mapsto -1^+} g(x)$

Exercice 3

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé dans lequel sont représentées les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g :



Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)$ e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$ f. $\lim\limits_{x\mapsto -1^-} g(x)$

Exercice 4

Graphiquement et à l'aide de la calculatrice, déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x-1}{3-x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} \dfrac{\sqrt{1-x}}{x-1}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto -2^+} \dfrac{-2\cdot x^2 - 2\cdot x + 4}{2\cdot x + 4}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} (x^2+x)\cdot\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$

Exercice 5

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \dfrac{x^2-3x+5}{x-1}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \dfrac{5-x}{1-x}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{x^2+x+1}{x}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x-1}{-x^3}$

Exercice 6*

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x + \dfrac{1}{x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} (x+1)\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)$

c. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^2 - x + 2$ d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} (x+2)(1-x)$

e. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} x + \dfrac{1}{x}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x-1}$

Exercice 7

Sans déterminer les limites, préciser lesquelles présentent une forme indéterminée :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{x^2+2\cdot x-1}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x^2+2\cdot x}{x^3-x^2}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} \sqrt{x^2-x-2}\cdot(x-2)$ d. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x-1}{x^2+x}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^3 - 2x^2 + 1$ f. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^3 - 2x^2 + 1$

Exercice 8*

Sans déterminer les limites, préciser lesquelles présentent une forme indéterminée :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x+\sqrt{x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x-\sqrt{x}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x-\dfrac{1}{x}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x-\dfrac{1}{x}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x+1}{x}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x+1}{x}$

Exercice 9*

Déterminer la valeurs des limites ci-dessous :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^2-x$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^2+x^3$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ d. $\lim\limits_{x\mapsto 2^-} \dfrac{5}{(x-2)^2}-\dfrac{3}{x-2}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^3+x-2$ f. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x^2+1}{x}-\dfrac{x+1}{x}$

Exercice 10*

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^2+2}{x+1}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x-3}{2\cdot x^2-3}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{4\cdot x^2-3\cdot x+2}{-3\cdot x^2}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^5+x^4}{x^3-x}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{5\cdot x^4-2\cdot x^3}{3\cdot x^2-2}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{2\cdot x^{10}+x}{6\cdot x^{10}-2\cdot x^3}$

Exercice 11

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{1}{x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{1}{x}$ c. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{3}{x^2}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x^3+2\cdot x}{x^2+x}$ e. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{-2\cdot x^2}{x^4+x^3}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{-2\cdot x^2}{x^4+x^3}$

Exercice 12

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} \dfrac{2-x}{2\cdot x^2-x-6}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 3^-} \dfrac{x-3}{2\cdot x^2-15\cdot x+27}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} \dfrac{-3\cdot x^2+7\cdot x-4}{(x-1)^2}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto -2^+} \dfrac{3\cdot x^2+5\cdot x-2}{x^2+7\cdot x+10}$

Exercice 13*

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} \dfrac{1}{2\cdot x^2-5\cdot x+2}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} \dfrac{1}{2\cdot x^2-12\cdot x+16}$

Exercice 14

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto -1^-} \dfrac{x+4}{3x^2-x-4}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} \dfrac{x^2+x-3}{3\cdot x^2-7\cdot x+4}$

Exercice 15*

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3x^2-x+1}{5x^2}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{2x+1}{3x^3-x+1}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x^{16}-x^3+x}{x^3-x^2}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{x^5-x^4}{x^6-2\cdot x^4}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} \dfrac{1}{x^2-x-2}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto 3^-} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

Exercice 16*

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^4-3x}{2x^2-4x^4}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto -2^+} \dfrac{x-1}{2x^2+5x+2}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} \dfrac{4-2x}{3x^2-4x-4}$

Exercice 17*

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3x^6+2x^3}{2x^8-x^3}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{3x^5-x^3}{x^4+x^3}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 3^+} \dfrac{1}{-2x^2+4x+6}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} \dfrac{x^2-3x+2}{-3x^2+5x+2}$

Exercice 18

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{5x^2+3x-1}{3x^3+2x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{3x^4-2x}{x^3+x^2}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} \dfrac{x^2-4x+4}{-2x^2+10x-12}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto -1^+} \dfrac{1}{2x^2+x-1}$

Exercice 19

1. Etablir l'égalité algébrique suivante pour $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}{x-1}$$

2. En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}=-2$$

Exercice 20

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \dfrac{1-x}{\sqrt{x+3}-2}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto -1^+} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+4x+3}$

Exercice 21

Chacune des limites ci-dessous représente une forme indéterminée ; effectuer les transformations algébriques adéquates pour déterminer chacune de ses limites :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\sqrt{x}-x$ c. $\lim\limits_{x\mapsto 2^-} \dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$

Exercice 22

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{2\cdot x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Etablir l'identité suivante : $f(x)=\dfrac{x\cdot\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$

3. En déduire les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x)$$

Exercice 23

Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\mapsto 3^-} \dfrac{\sqrt{3-x}}{2x^2-5x-3}$

Exercice 24

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Exercice 25

Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{4{\cdot}x^2-3x+1}}$

Exercice 26*

On considère la fonction f définie par :

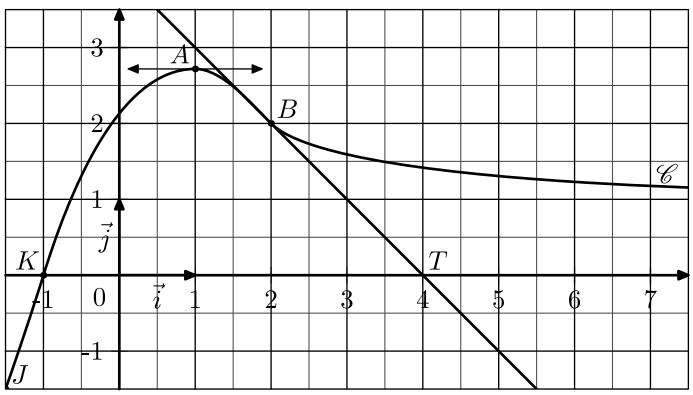
$$f(x) = \sqrt{\frac{4x-4}{x+1}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Préciser si la courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de la fonction f admet des asymptotes ; on précisera leurs caractéristiques.

Exercice 27

Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable sur $\left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

- Les points $J\left(-\frac{3}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$, $K(-1\,;0)$, $A\left(1\,;\frac{11}{4}\right)$, $B(2\,;2)$ sont des points de $\mathscr{C}$;
- La tangente à $\mathscr{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses.
- La tangente à $\mathscr{C}$ en B passe par $T(4\,;0)$.
- La droite d'équation $y=1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
- La fonction f est strictement croissante sur $\left[-\frac{3}{2}\,;1\right]$ et strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$.



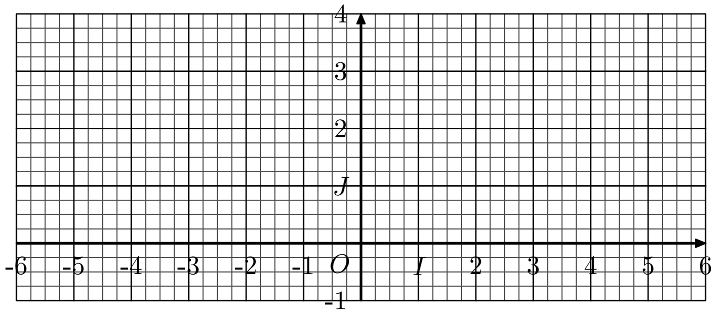
1. Donner les valeurs de $f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$ ainsi que la limite de f en $+\infty$.
2. Donner, en justifiant vos résponses, les nombres $f'(1)$ et $f'(2)$

Exercice 28

On considère la fonction f définie par :

$$f\colon x \longmapsto \frac{x^2+4x-1}{x^2-2x+5}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
   b. Quelles asymptotes admet la fonction f ?
3. a. Etablir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet l'expression :
   $$f'(x) = \frac{-6x^2+12x+18}{\left(x^2-2x+5\right)^2}$$
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente (Δ) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
5. Tracer la droite (Δ), les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$ puis la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé ci-dessous :



Exercice 29*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x^3-4x^2+x+12}{4{\cdot}x^2+4}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a. Déterminer la valeur des réels a et b vérifiant l'égalité :
   $$f(x) = a{\cdot}x + b + \frac{16}{4{\cdot}x^2+4}$$
   b. On note (d) la droite d'équation : $y=\frac{1}{4}{\cdot}x-1$.
   Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (d).
3. Déterminer la valeur de la limite :
   $$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) - \left(\frac{1}{4}{\cdot}x-1\right)$$
4. Ci-dessous sont représentées les quatre courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_4$. Laquelle de ces courbes est la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f ?