Correction 1

1. a. Par la fonction f, le nombre 3 a pour image :

$$f(3)=\frac{1}{3}\times3^3-\frac{3}{2}\times3^2+3+1=\frac{1}{3}\times27-\frac{3}{2}\times9+3+1$$
$$=9-\frac{27}{2}+3+1=13-\frac{27}{2}=\frac{26}{2}-\frac{27}{2}=-\frac{1}{2}$$

Ainsi, le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 3 a pour coordonnées $\left(3\,;-\frac{1}{2}\right)$

b. La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot3x^2-\frac{3}{2}\cdot2x+1=x^2-3x+1$$

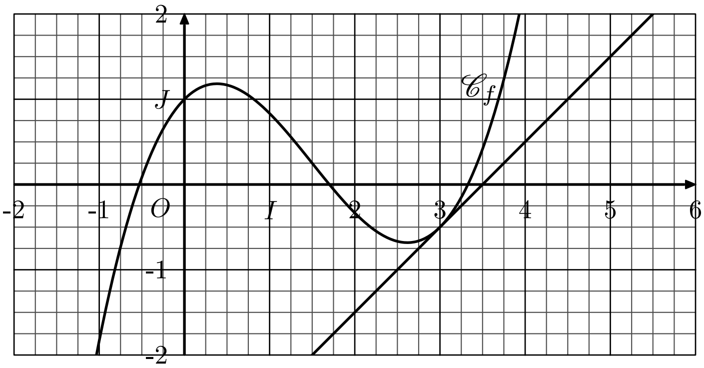
Le coefficient directeur de la tangente (Δ) est égal au nombre dérivée de la fonction f en 3 :

$$f'(3)=3^2-3\times3+1=1$$

La droite (Δ) a pour coefficient directeur 3.

2. La tangente (Δ) de la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation réduite :

$$y=f'(3)\cdot(x-3)+f(3)$$
$$y=1\cdot(x-3)+\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$y=x-3-\frac{1}{2}$$
$$y=x-\frac{7}{2}$$



Correction 2

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=1$

b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=1$

c. $\lim\limits_{x\mapsto1^+} f(x)=+\infty$

d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)=\frac{1}{2}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)=\frac{1}{2}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto-1^+} g(x)=+\infty$

Correction 3

a. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=2$

b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=0$

c. $\lim\limits_{x\mapsto1^-} f(x)=-\infty$

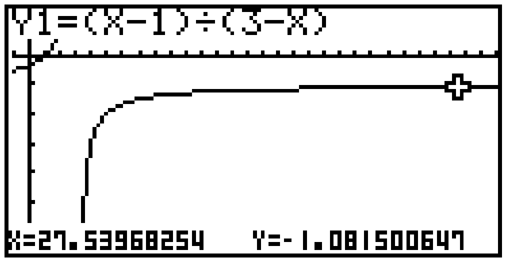
d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)=0$

e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)=2$

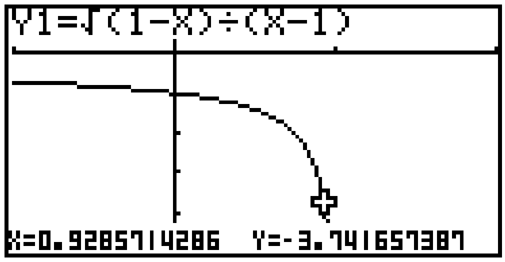
f. $\lim\limits_{x\mapsto-1^-} g(x)=-1$

Correction 4

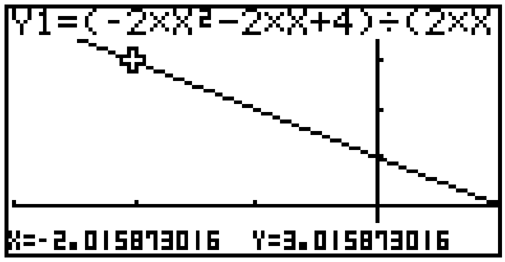
a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{x-1}{3-x}=-1$



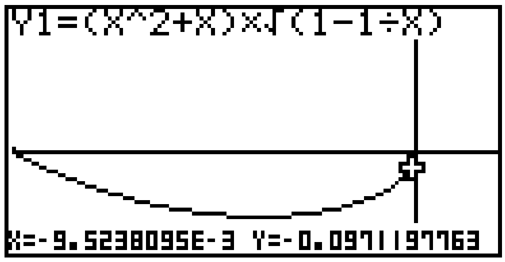
b. $\lim\limits_{x\mapsto1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x-1}=-\infty$



c. $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \frac{-2\cdot x^2-2\cdot x+4}{2\cdot x+4}=3$



d. $\lim\limits_{x\mapsto0^-} (x^2+x)\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}}=0$



Correction 5

a. On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto1^+} x^2-3x+5=3 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto1^+} x-1=0^+$$

On en déduit la limite du quotient :

$$\lim_{x\mapsto1^+}\frac{x^2-3x+5}{x-1}=+\infty$$

b. On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto1^+} 5-x=4 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto1^+} 1-x=0^-$$

On en déduit la limite du quotient :

$$\lim_{x\mapsto1^+}\frac{5-x}{1-x}=-\infty$$

c. On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto0^-} x^2+x+1=1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto0^-} x=0^-$$

On en déduit la limite du quotient :

$$\lim_{x\mapsto0^-}\frac{x^2+x+1}{x}=-\infty$$

d. On a les deux limites suivantes :

$\lim_{x\mapsto 0^+} x-1=-1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^+} -x^3=0^-$

On en déduit la limite du quotient :

$\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x-1}{-x^3}=+\infty$

Correction 6

a. On a les deux limites :

$\lim_{x\mapsto +\infty} x=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto +\infty} \frac{1}{x}=0$

On en déduit la limite : $\lim_{x\mapsto +\infty} x+\frac{1}{x}=+\infty$

b. On a les deux limites :

$\lim_{x\mapsto +\infty} x+1=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto +\infty} 1+\frac{1}{x}=1$

On en déduit la limite : $\lim_{x\mapsto +\infty} (x+1)\Big(1+\frac{1}{x}\Big)=+\infty$

c. On a les deux limites :

$\lim_{x\mapsto -\infty} x^2=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto -\infty} -x+2=+\infty$

On en déduit la limite : $\lim_{x\mapsto -\infty} x^2-x+2=+\infty$

d. On a les deux limites :

$\lim_{x\mapsto -\infty} x+2=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto -\infty} 1-x=+\infty$

On en déduit la limite : $\lim_{x\mapsto -\infty} (x+2)(1-x)=-\infty$

e. On a les deux limites :

$\lim_{x\mapsto 0^-} x=0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^-} \frac{1}{x}=-\infty$

On en déduit la limite : $\lim_{x\mapsto 0^-} x+\frac{1}{x}=-\infty$

f. On a les deux limites :

$\lim_{x\mapsto 1^+} \frac{x-1}{x}=0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 1^+} \frac{x}{x-1}=+\infty$

On en déduit la limite : $\lim_{x\mapsto 1^+} \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x-1}=+\infty$

Correction 7

a. On a les deux limites suivantes :

$\lim_{+\infty} 1+\frac{1}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto +\infty} x^2+2x-1=+\infty$

Ainsi, on obtient la valeur suivante :

$\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{x^2+2x-1}=0$

b. On a les deux limites suivantes :

$\lim_{x\mapsto 0^+} x^2+2x=0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^+} x^3-x^2=0$

La limite $\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x^2+2x}{x^3-x^2}$ présente une forme indétermineée.

c. On a : $\lim_{x\mapsto 2^+} \sqrt{x^2-x-2}=0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 2^+} x-2=0$

On en déduit la valeur suivante de la limite :

$\lim_{x\mapsto 2^+} \sqrt{x^2-x-2}\cdot(x-2)=0$

d. On a : $\lim_{x\mapsto 0^+} x-1=-1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^+} x^2+x=0^+$

On en déduit : $\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x-1}{x^2+x}=-\infty$

e. On a : $\lim_{x\mapsto -\infty} x^3=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto -\infty} -2x^2+1=-\infty$

On obtient la valeur suivante de la limite :

$\lim_{x\mapsto -\infty} x^3-2x^2+1=-\infty$

f. On a : $\lim_{x\mapsto +\infty} x^3=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto +\infty} -2x^2+1=-\infty$

Ainsi, la limite $\lim_{x\mapsto +\infty} x^3-2x^2+1$ présente une forme indéterminée.

Correction 8

a. $\lim_{x\mapsto +\infty} x+\sqrt{x}=+\infty$

b. La limite "$\lim_{x\mapsto +\infty} x-\sqrt{x}$" est une forme indéterminée et elle est de la forme $(+\infty)-(+\infty)$

c. $\lim_{x\mapsto 0^+} x-\frac{1}{x}=-\infty$

d. $\lim_{x\mapsto +\infty} x-\frac{1}{x}=+\infty$

e. $\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x+1}{x}=+\infty$

f. $\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{x+1}{x}$ est une forme indéterminée et elle est de la forme "$\frac{\infty}{\infty}$"

Correction 9

a. On a la transformation algébrique suivante :

$x^2-x=x\big(x-1\big)$

On a les deux limites suivantes :

$\lim_{x\mapsto +\infty} x=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto \infty} x-1=+\infty$

On en déduit la limite suivante :

$\lim_{x\mapsto \infty} x\big(x-1\big)=+\infty$

b. On a la transformation algébrique suivante :

$x^2+x^3=x^2\cdot\big(1+x\big)$

On a les deux limites suivantes :

$\lim_{x\mapsto -\infty} x^2=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto -\infty} 1+x=-\infty$

On en déduit la limite suivante :

$\lim_{x\mapsto -\infty} x^2+x^3=-\infty$

c. On a la transformation algébrique suivante :

$x\Big(1+\frac{1}{x}\Big)=x+1$

On en déduit la limite suivante :

$\lim_{x\mapsto 0^+} x+1=0$

d. On a la transformation algébrique suivante :

$$\frac{5}{(x-2)^2}-\frac{3}{x-2}=\frac{5}{(x-2)^2}-\frac{3(x-2)}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{5}{(x-2)^2}-\frac{3x-6}{(x-2)^2}=\frac{5-(3x-6)}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{5-3x+6}{(x-2)^2}=\frac{11-3x}{(x-2)^2}$$

On a les deux limites suivantes :

$\lim_{x\mapsto 2^-} 11-3x=5 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 2^-} (x-2)^2=0^+$

On en déduit la limite suivante :

$\lim_{x\mapsto 2^-} \frac{5}{(x-2)^2}-\frac{3}{x-2}=+\infty$

e. On a la transformation algébrique suivante :

$x^3+x-2=x\cdot\big(x^2+1\big)-2$

On a les deux limites suivantes :
$\lim_{x\mapsto-\infty} x = -\infty$; $\lim_{x\mapsto-\infty} x^2+1 = +\infty$

On en déduit la limite suivante :
$\lim_{x\mapsto-\infty} x\cdot\big(x^2+1\big)-2 = -\infty$

f. On a la transformation algébrique suivante :
$$\frac{x^2+1}{x}-\frac{x+1}{x}=\frac{x^2+1-(x+1)}{x}$$
$$=\frac{x^2+1-x-1}{x}=\frac{x^2-x}{x}=\frac{x(x-1)}{x}=x-1$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto0^+}\frac{x^2+1}{x}-\frac{x+1}{x}=-1$$

Correction 10

a. Pour $x\neq0$, on a les transformations algébriques :
$$\frac{x^2+2}{x+1}=\frac{x^2\cdot\Big(1+\dfrac{2}{x^2}\Big)}{x\cdot\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)}=\frac{x\cdot\Big(1+\dfrac{2}{x^2}\Big)}{1+\dfrac{1}{x}}$$
On a les deux limites suivantes :
$\lim_{x\mapsto+\infty} x\cdot\Big(1+\dfrac{2}{x^2}\Big)=+\infty$; $\lim_{x\mapsto+\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1$
$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2+2}{x+1}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x\cdot\Big(1+\dfrac{2}{x^2}\Big)}{1+\dfrac{1}{x}}=+\infty$$

b. Pour $x\neq0$, on a les transformations algébriques :
$$\frac{x-3}{2\cdot x^2-3}=\frac{x\cdot\Big(1-\dfrac{3}{x}\Big)}{x^2\cdot\Big(2-\dfrac{3}{x^2}\Big)}=\frac{1-\dfrac{3}{x}}{x\cdot\Big(2-\dfrac{3}{x^2}\Big)}$$
On a les deux limites suivantes :
$\lim_{x\mapsto-\infty} 1-\dfrac{3}{x}=1$; $\lim_{x\mapsto-\infty} x\cdot\Big(2-\dfrac{3}{x^2}\Big)=+\infty$

On en déduit la limite :
$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x-3}{2\cdot x^2-3}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{1-\dfrac{3}{x}}{x\cdot\Big(2-\dfrac{3}{x^2}\Big)}=0$$

c. Pour $x\neq0$, on a les transformations algébriques :
$$\frac{4\cdot x^2-3\cdot x+2}{-3\cdot x^2}=\frac{x^2\cdot\Big(4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\Big)}{-3\cdot x^2}=\frac{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{-3}$$
On a les limites suivantes :
$\lim_{x\mapsto-\infty} 4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}=4$; $\lim_{x\mapsto-\infty} -3=-3$

On en déduit :
$$\lim_{x\mapsto-\infty}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{4\cdot x^2-3\cdot x+2}{-3\cdot x^2}=-\frac{4}{3}$$

d. Pour $x\neq0$, on a les transformations algébriques :
$$\frac{x^5+x^4}{x^3-x}=\frac{x^5\cdot\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)}{x^3\cdot\Big(1-\dfrac{1}{x^2}\Big)}=\frac{x^2\cdot\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)}{1-\dfrac{1}{x^2}}$$
On a les deux limites suivantes :
$\lim_{x\mapsto-\infty} x^2\cdot\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)=+\infty$; $\lim_{x\mapsto-\infty} 1-\dfrac{1}{x^2}=1$

On en déduit :
$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x^5+x^4}{x^3-x}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x^2\cdot\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)}{1-\dfrac{1}{x^2}}=+\infty$$

e. Pour $x\neq0$, on a les transformations algébriques :
$$\frac{5\cdot x^4-2\cdot x^3}{3\cdot x^2-2}=\frac{x^4\cdot\Big(5-\dfrac{2}{x}\Big)}{x^2\cdot\Big(3-\dfrac{2}{x^2}\Big)}=\frac{x^2\cdot\Big(5-\dfrac{2}{x}\Big)}{3-\dfrac{2}{x^2}}$$
On a les deux limites suivantes :
$\lim_{x\mapsto+\infty} x^2\cdot\Big(5-\dfrac{2}{x}\Big)=+\infty$; $\lim_{x\mapsto+\infty} 3-\dfrac{2}{x^2}=3$

On en déduit la limite :
$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{5\cdot x^4-2\cdot x^3}{3\cdot x^2-2}=+\infty$$

f. Pour $x\neq0$, on a les transformations algébriques :
$$\frac{2\cdot x^{10}+x}{6\cdot x^{10}-2\cdot x^3}=\frac{x^{10}\cdot\Big(2+\dfrac{1}{x^9}\Big)}{x^{10}\cdot\Big(6-\dfrac{2}{x^7}\Big)}=\frac{2+\dfrac{1}{x^9}}{6-\dfrac{2}{x^7}}$$
On a les deux limites suivantes :
$\lim_{x\mapsto+\infty} 2+\dfrac{1}{x^9}=2$; $\lim_{x\mapsto+\infty} 6-\dfrac{2}{x^7}=6$

On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2\cdot x^{10}+x}{6\cdot x^{10}-2\cdot x^3}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x^9}}{6-\dfrac{2}{x^7}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Correction 11

a. $\lim_{x\mapsto0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$

b. $\lim_{x\mapsto0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

c. On a les deux limites : $\lim_{x\mapsto0^-} x^2=0^+$; $\lim_{x\mapsto0^-} 3=3$

On en déduit la limite : $\lim_{x\mapsto0^-}\dfrac{3}{x^2}=+\infty$

d. Par l'ensemble de définition de cette expression, on a $x\neq0$. Ainsi, on a la simplification :
$$\frac{x^3+2\cdot x}{x^2+x}=\frac{x\cdot\big(x^2+2\big)}{x\cdot(x+1)}=\frac{x^2+2}{x+1}$$
On a les deux limites suivantes :
$\lim_{x\mapsto0^+} x^2+2=2$; $\lim_{x\mapsto0^+} x+1=1$

On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto0^+}\frac{x^3+2\cdot x}{x^2+x}=\lim_{x\mapsto0^+}\frac{x^2+2}{x+1}=\frac{2}{1}=2$$

e. Par l'ensemble de définition de cette expression, on a $x\neq0$. Ainsi, on a la simplification :
$$\frac{-2\cdot x^2}{x^4+x^3}=\frac{-2\cdot x^2}{x^3\cdot(x+1)}=\frac{-2}{x\cdot(x+1)}$$
On a les limites suivantes :
$\lim_{x\mapsto0^+} -2=-2$; $\lim_{x\mapsto0^+} x=0^+$; $\lim_{x\mapsto0^+} x+1=1$

On en déduit la limite suivante :
$\lim_{x\mapsto0^+} x\cdot(x+1)=0^+$

On a alors : $\lim_{x\mapsto0^+}\dfrac{-2\cdot x^2}{x^4+x^3}=\lim_{x\mapsto0^+}\dfrac{-2}{x\cdot(x+1)}=-\infty$

f. On utilisera la transformation algébriques issue de la question précédente.

On a les limites suivantes :
$\lim_{x\mapsto0^-} -2=-2$; $\lim_{x\mapsto0^-} x=0^-$; $\lim_{x\mapsto0^-} x+1=1$

On en déduit la limite suivante :
$\lim_{x\mapsto0^-} x\cdot(x+1)=0^-$

On a alors : $\lim_{x\mapsto0^-}\dfrac{-2\cdot x^2}{x^4+x^3}=\lim_{x\mapsto0^-}\dfrac{-2}{x\cdot(x+1)}=+\infty$

Correction 12

a. Le dénominateur du quotient étudié est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-1)^2 - 4{\times}2{\times}(-6) = 1 + 48 = 49$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \dfrac{-(-1)-7}{2{\times}2} = \dfrac{1-7}{4} = \dfrac{-6}{4} = -\dfrac{3}{2}$ | $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \dfrac{-(-1)+7}{2{\times}2} = \dfrac{1+7}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$

Ce polynôme admet la forme factorisée suivante :
$2{\cdot}x^2 - x - 6 = 2{\cdot}\Big(x+\dfrac{3}{2}\Big){\cdot}(x-2) = (2x+3)(x-2)$

On a les transformations algébriques suivantes :
$\dfrac{2-x}{2{\cdot}x^2-x-6} = \dfrac{2-x}{(2x+3)(x-2)} = \dfrac{-(x-2)}{(2x+3)(x-2)} = \dfrac{-1}{2x+3}$

On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto 2^+} -1 = -1$; $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} 2x+3 = 7$

On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto 2^+} \dfrac{2-x}{2{\cdot}x^2-x-6} = \lim\limits_{x\mapsto 2^+} \dfrac{-1}{2x+3} = \dfrac{-1}{7} = -\dfrac{1}{7}$

b. On remarque que le dénominateur du quotient étudié s'annule en 3 :
$2{\times}3^2 - 15{\times}3 + 27 = 2{\times}9 - 45 + 27 = 18 - 45 + 27 = 45 - 45 = 0$

Pour établir la factorisation :
$2{\cdot}x^2 - 15{\cdot}x + 27 = (x-3)(2x-9)$
Il suffit de développer l'expression :
$(x-3)(2x-9) = 2x^2 - 9x - 6x + 27 = 2x^2 - 15x + 27$

On a les manipulations algébriques suivantes :
$\dfrac{x-3}{2{\cdot}x^2-15{\cdot}x+27} = \dfrac{x-3}{(x-3)(2x-9)} = \dfrac{1}{2x-9}$

On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto 3^-} 1 = 1$; $\lim\limits_{x\mapsto 3^-} 2x-9 = -3$

On en déduit la limite :
$\lim\limits_{x\mapsto 3^-} \dfrac{x-3}{2{\cdot}x^2-15{\cdot}x+27} = \lim\limits_{x\mapsto 3^-} \dfrac{1}{2x-9} = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$

c. Le numérateur du quotient étudié est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 7^2 - 4{\times}(-3){\times}(-4) = 49 - 48 = 1$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \dfrac{-7-1}{2{\times}(-3)} = \dfrac{-8}{-6} = \dfrac{4}{3}$ | $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \dfrac{-7+1}{2{\times}(-3)} = \dfrac{-6}{-6} = 1$

Le numérateur admet la factorisation suivante :
$-3{\cdot}x^2 + 7{\cdot}x - 4 = -3{\cdot}\Big(x-\dfrac{4}{3}\Big){\cdot}(x-1) = (4-3x)(x-1)$

On a la transformation algébrique suivante :
$\dfrac{-3{\cdot}x^2+7{\cdot}x-4}{(x-1)^2} = \dfrac{(4-3x)(x-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{4-3x}{x-1}$

On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto 1^-} 4-3x = 1$; $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} x-1 = 0^-$
On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto 1^-} \dfrac{-3{\cdot}x^2+7{\cdot}x-4}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\mapsto 1^-} \dfrac{4-3x}{x-1} = -\infty$

d. Les deux polynômes définissant le numérateur et le quotient du numérateur s'annule en -2 : $(x{+}2)$ est un facteur commun à ces deux polynômes.

Etablissons les deux factorisations suivantes :

- $3{\cdot}x^2 + 5{\cdot}x - 2 = (x+2)(3x-1)$
  On a le développement :
  $(x+2)(3x-1) = 3x^2 - x + 6x - 2 = 3x^2 + 5x - 2$
- $x^2 + 7{\cdot}x + 10 = (x+2)(x+5)$
  On a le développement suivant :
  $(x+2)(x+5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$

On a la simplification du quotient :
$\dfrac{3{\cdot}x^2+5{\cdot}x-2}{x^2+7{\cdot}x+10} = \dfrac{(x+2)(3x-1)}{(x+2)(x+5)} = \dfrac{3x-1}{x+5}$

On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto -2^+} 3x-1 = -7$; $\lim\limits_{x\mapsto -2^+} x+5 = 3$

On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto -2^+} \dfrac{3{\cdot}x^2+5{\cdot}x-2}{x^2+7{\cdot}x+10} = \lim\limits_{x\mapsto -2^+} \dfrac{3x-1}{x+5} = \dfrac{-7}{3} = -\dfrac{7}{3}$

Correction 13

a. Le polynôme du second degré définissant le dénominateur du quotient étudié a pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-5)^2 - 4{\times}2{\times}2 = 25 - 16 = 9$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Le discriminant de ce polynôme étant strictement positif, il admet les deux racines suivantes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \dfrac{-(-5)-3}{2{\times}2} = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ | $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \dfrac{-(-5)+3}{2{\times}2} = \dfrac{5+3}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2{\cdot}x^2-5{\cdot}x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^+} 2{\cdot}x^2-5{\cdot}x+2=0^+$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^+}\frac{1}{2{\cdot}x^2-5{\cdot}x+2}=+\infty$

b. On vérifie facilement que le polynôme du dénominateur s'annule en 2 :
$2\times2^2-12\times2+16=2\times4-24+16=8+16-24$
$=24-24=0$
Vérifions la factorisation :
$2{\cdot}x^2-12{\cdot}x+16=(x-2)(2x-8)$:
On a le développement :
$(x-2)(2x-8)=2x^2-8x-4x+16$
$=2x^2-12x+16$
On en déduit que ce polynôme du second degré possède pour racine les nombres 2 et 4. Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$2{\cdot}x^2-12{\cdot}x+16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^+} 2{\cdot}x^2-12{\cdot}x+16=0^-$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^+}\frac{1}{2{\cdot}x^2-12{\cdot}x+16}=-\infty$

Correction 14

a. Considérons le polynôme formant le dénominateur du quotient étudié. Il possède pour discriminant :
$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-1)^2-4\times3\times(-4)=1+48=49$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-1)-7}{2{\cdot}3}=\frac{1-7}{6}=\frac{-6}{6}=-1$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-1)+7}{2{\cdot}3}=\frac{1+7}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

Le coefficient du second degré de ce polynôme étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x^2-x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a les limites suivantes :
$\displaystyle\lim_{x\mapsto -1^-} x+4=3$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto -1^-} 3x^2-x-4=0^+$

On en déduit la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto -1^-}\frac{x+4}{3x^2-x-4}=+\infty$

b. Vérifions que le dénominateur du quotient étudié s'annule en 1 :
$3\times1^2-7\times1+4=3-7+4=0$

Vérifions la factorisation : $3{\cdot}x^2-7{\cdot}x+4=(3x-4)(x-1)$
On a le développement :
$(3x-4)(x-1)=3x^2-3x-4x+4=3x^2-7x+4$

Le coefficient du second degré étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3{\cdot}x^2-7{\cdot}x+4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a les deux limites suivantes :
$\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^-} x^2+x-3=-1$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^-} 3{\cdot}x^2-7{\cdot}x+4=0^+$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^-}\frac{x^2+x-3}{3{\cdot}x^2-7{\cdot}x+4}=-\infty$

Correction 15

a. Pour $x\neq0$, on a la transformation suivante :

$$\frac{3x^2-x+1}{5x^2}=\frac{x^2\cdot\left(3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{5x^2}=\frac{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{5}$$

On a la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} 3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=3$

On en déduit la valeur de la limite :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{3x^2-x+1}{5x^2}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{5}=\frac{3}{5}$$

b. Pour $x\neq0$, on a la transformation suivante :

$$\frac{2x+1}{3x^3-x+1}=\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\left(3x^2-1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{2+\frac{1}{x}}{3x^2-1+\frac{1}{x}}$$

on a les deux limites suivantes :
$\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} 2+\frac{1}{x}=2$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} 3x^2-1+\frac{1}{x}=+\infty$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2x+1}{3x^3-x+1}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{3x^2-1+\frac{1}{x}}=0$$

c. Pour $x\neq0$, on a la transformation suivante :

$$\frac{x^{16}-x^3+x}{x^3-x^2}=\frac{x\cdot\left(x^{15}-x^2+1\right)}{x^2\cdot\left(x-1\right)}=\frac{x^{15}-x^2+1}{x\cdot\left(x-1\right)}$$

On a les deux limites suivantes :
$\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+} x^{15}-x^2+1=1$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+} x{\cdot}(x-1)=0^-$

On en déduit la valeur suivante de la limite :

$$\lim_{x\mapsto0^+}\frac{x^{16}-x^3+x}{x^3-x^2}=\lim_{x\mapsto0^+}\frac{x^{15}-x^2+1}{x\cdot\left(x-1\right)}=-\infty$$

d. Pour $x\neq0$, on a la transformation suivante :

$$\frac{x^5-x^4}{x^6-2{\cdot}x^4}=\frac{x^4\cdot\left(x-1\right)}{x^4\cdot\left(x^2-2\right)}=\frac{x-1}{x^2-2}$$

On a les deux limites suivantes :
$\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-} x-1=-1$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-} x^2-2=-2$

On a : $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-}\frac{x^5-x^4}{x^6-2{\cdot}x^4}=\lim_{x\mapsto0^-}\frac{x-1}{x^2-2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$

e. Etudions le polynôme x^2-x-2 ; son discriminant a pour valeur :
$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-1)^2-4\times1\times(-2)=1+8=9$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Le discriminant est strictement positif ; on en déduit que ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-3}{2\times 1} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+3}{2\times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Le coefficient du terme du second degré est positif, on en déduit qu'il admet le tableau de signes suivante :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto 2^+} x^2-x-2 = 0^+$$

Ainsi, on a la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^+} \frac{1}{x^2-x-2} = +\infty$

f. En reconnaissant les identités remarquables au numérateur et au dénominateur de cette fraction rationnelle, on a la transformation algébrique suivante :
$$\frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = \frac{(x-3)^2}{(x+3)(x-3)} = \frac{x-3}{x+3}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 3^-} x-3 = 0^- \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 3^-} x+3 = 6$$
On en déduit la valeur suivante de la limite :
$$\lim_{x\mapsto 3^-} \frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = \lim_{x\mapsto 3^-} \frac{x-3}{x+3} = -\infty$$

Correction 16

a. Pour $x\neq 0$, on a les transformations algébriques :
$$\frac{x^4-3x}{2x^2-4x^4} = \frac{x^4\cdot\left(1-\dfrac{3}{x^3}\right)}{x^4\cdot\left(\dfrac{2}{x^2}-4\right)} = \frac{1-\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{2}{x^2}-4}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto -\infty} 1-\frac{3}{x^3} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto -\infty} \frac{2}{x^2}-4 = -4$$
On en déduit la limite du quotient :
$$\lim_{x\mapsto -\infty} \frac{x^4-3x}{2x^2-4x^4} = \lim_{x\mapsto -\infty} \frac{1-\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{2}{x^2}-4} = \frac{1}{4}$$

b. Etudions le polynôme définissant le dénominateur du quotient. Il admet pour discriminant :
$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = 5^2-4\times 2\times 2 = 25-16 = 9$$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-5-3}{2\times 2} = \frac{-8}{4} = -2 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-5+3}{2\times 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$
Ainsi, ce polynôme admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x^2+5x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto -2^+} x-1 = 3 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto -2^+} 2x^2+5x+2 = 0^-$$
On en déduit la limite du quotient :
$$\lim_{x\mapsto -2^+} \frac{x-1}{2x^2+5x+2} = -\infty$$

c. Etudions le polynôme du second degré définissant le dénominateur du quotient. Il admet pour discriminant :
$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-4)^2-4\times 3\times(-4) = 16+48 = 64$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-4)-8}{2\times 3} = \frac{4-8}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-4)+8}{2\times 3} = \frac{4+8}{6} = \frac{12}{6} = 2$$
Ainsi, ce polynôme admet la forme factorisée suivante :
$$3x^2-4x-4 = 3\cdot(x-2)\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right) = (x-2)\cdot(3x+2)$$
On a les transformations algébriques suivantes :
$$\frac{4-2x}{3x^2-4x-4} = \frac{4-2x}{(x-2)\cdot(3x+2)} = \frac{-2(x-2)}{(x-2)\cdot(3x+2)} = \frac{-2}{3x+2}$$
Ainsi, on a la limite :
$$\lim_{x\mapsto 2^+} \frac{-2}{3x+2} = \lim_{x\mapsto 2^+} \frac{-2}{3x+2} = \frac{-2}{3\times 2+2} = \frac{-2}{6+2} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Correction 17

a. Pour $x\neq 0$, on a la transformation suivante :
$$\frac{3x^6+2x^3}{2x^8-x^3} = \frac{x^6\cdot\left(3+\dfrac{2}{x^3}\right)}{x^8\cdot\left(2-\dfrac{1}{x^5}\right)} = \frac{3+\dfrac{2}{x^3}}{x^2\cdot\left(2-\dfrac{1}{x^5}\right)}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto +\infty} 3+\frac{2}{x^3} = 3 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto +\infty} x^2\cdot\left(2-\frac{1}{x^5}\right)$$
On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{3x^6+2x^3}{2x^8-x^3} = 0$

b. Pour $x\neq 0$, on a la transformation suivante :
$$\frac{3x^5-x^3}{x^4+x^3} = \frac{x^3\cdot\left(3x^2-1\right)}{x^3\cdot\left(x+1\right)} = \frac{3x^2-1}{x+1}$$
On a les deux limite suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 0} 3x^2-1 = -1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0} x+1 = 1$$
On en déduit la valeur de la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{3x^5-x^3}{x^4+x^3} = -1$$

c. En observant que le dénominateur s'annule en 3, on déduit que 3 est une racine de ce polynôme ; on obtient sa forme factorisée :
$$-2x^2+4x+6 = -2(x-3)(x+1)$$
Vérifions cette factorisation :

$$-2(x-3)(x+1) = (-2x+6)(x+1)$$
$$= -2x^2 - 2x + 6x + 6 = -2x^2 + 4x + 6$$

Le coefficient du second degré de ce polynôme est négatif, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-2x^2+4x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, on a la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto 3^+} -2x^2+4x+6 = 0^-$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto 3^+} \frac{1}{-2x^2+4x+6} = -\infty$$

d. En observant que le numérateur et le dénominateur s'annule en 2, on obtient les factorisations suivantes :

- $x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$
- $-3x^2+5x+2 = -3(x-2)\Big(x+\dfrac{1}{3}\Big)$

Vérifions ces factorisations :

- $(x-2)(x-1) = x^2-x-2x+2$
  $= x^2-3x+2$
- $-3(x-2)\Big(x+\dfrac{1}{3}\Big) = (x-2)(-3x-1)$
  $= -3x^2-x+6x+2 = -3x^2+5x+2$

Ainsi, on a la transformation suivante du quotient :
$$\frac{x^2-3x+2}{-3x^2+5x+2} = \frac{(x-2)(x-1)}{-3(x-2)\Big(x+\dfrac{1}{3}\Big)} = \frac{x-1}{-3x-1}$$

On a les limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 2^+} x-1 = 1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 2^+} -3x-1 = -7$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto 2^+} \frac{x^2-3x+2}{-3x^2+5x+2} = -\frac{1}{7}$$

Correction 18

a. Pour $x\neq 0$, on a les manipulations algébriques suivantes :
$$\frac{5x^2+3x-1}{3x^3+2x} = \frac{x^2\cdot\Big(5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\Big)}{x^3\cdot\Big(3+\dfrac{2}{x^2}\Big)} = \frac{5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{x\cdot\Big(3+\dfrac{2}{x^2}\Big)}$$

On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto +\infty} 5+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2} = 5 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto +\infty} x\cdot\Big(3+\frac{2}{x^2}\Big) = +\infty$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{5x^2+3x-1}{3x^3+2x} = \lim_{x\mapsto +\infty} \frac{5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{x\cdot\Big(3+\dfrac{2}{x^2}\Big)} = 0$$

b. Pour $x\neq 0$, on a les manipulations suivantes :
$$\frac{3x^4-2x}{x^3+x^2} = \frac{x\cdot(3x^3-2)}{x^2\cdot(x+1)} = \frac{3x^3-2}{x\cdot(x+1)}$$

On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto -} 3x^3-2 = -2 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^-} x\cdot\big(x+1\big) = 0^-$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto 0^-} \frac{3x^4-2x}{x^3+x^2} = \lim_{x\mapsto 0^-} \frac{3x^3-2}{x\cdot(x+1)} = +\infty$$

c. En remarquant que le numérateur et le dénominateur s'annule, on en déduit que 2 est une racine commune au numérateur et au dénominateur.

Vérifions la factorisation suivante :
$$\frac{x^2-4x+4}{-2x^2+10x-12} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(6-2x)}$$

- $(x-2)^2 = x^2-4x+4$
- $(x-2)(6-2x) = 6x-2x^2-12+4x = -2x^2+10x-12$

Ces deux développements permettent d'établir la factorisation annoncée.

Ainsi, on en déduit la simplification suivante :
$$\frac{x^2-4x+4}{-2x^2+10x-12} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(6-2x)} = \frac{x-2}{6-2x}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 2^+} x-2 = 0^+ \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 2^+} 6-2x = 2$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto 2^+} \frac{x^2-4x+4}{-2x^2+10x-12} = \lim_{x\mapsto 2^+} \frac{x-2}{6-2x} = 0$$

d. Pour connaître le signe du dénominateur, nous devons connaître les deux racines du polynôme du dénominateur ; le discriminant de ce polynôme a pour valeur :
$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = 1^2-4\cdot 2\cdot(-1) = 1+8 = 9$$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-1-3}{2\cdot 2} = \frac{-4}{4} = -1$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-1+3}{2\cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Le discriminant de ce polynôme étant strictement positif, ce polynôme admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x^2+x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, on en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto -1^+} 2x^2+x-1 = 0^-$$
On a ainsi le résultat :
$$\lim_{x\mapsto -1^+} \frac{1}{2x^2+x-1} = -\infty$$

Correction 19

1. Le facteur $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}$ étant non-nul, à l'aide de l'expression conjuguée du dénominateur, on a les transformations algébriques suivantes :
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}} = \frac{x\cdot\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\big)}{\big(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}\big)\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\big)}$$
$$= \frac{x\cdot\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\big)}{\big(\sqrt{x^2+1}\big)^2-\big(\sqrt{x+1}\big)^2} = \frac{x\cdot\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\big)}{(x^2+1)-(x+1)}$$
$$= \frac{x\cdot\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\big)}{x^2+1-x-1} = \frac{x\cdot\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\big)}{x\cdot(x-1)}$$
$$= \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}{x-1}$$

2. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 0^+} \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1} = 2 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^+} x-1 = -1$$
On en déduit la limite du quotient :

$$\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}{x-1}$$
$$=\frac{2}{-1}=-2$$

Correction 20

a. Le facteur $\sqrt{x+3}+2$ est non-nul. On a la transformation algébrique suivante :
$$\frac{1-x}{\sqrt{x+3}-2}=\frac{(1-x)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$
$$=\frac{(1-x)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2}=\frac{(1-x)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4}$$
$$=\frac{(1-x)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x-1}=\frac{-(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x-1}$$
$$=-\left(\sqrt{x+3}+2\right)$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 1^+}\frac{1-x}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\mapsto 1^+}-\left(\sqrt{x+3}+2\right)=-4$$

b. Cherchons la forme factorisée du dénominateur de ce quotient. Ce polynôme du second degré admet pour discriminant :
$$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=4^2-4{\times}1{\times}3=16-12=4$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$

Le discriminant de ce polynôme est strictement positif ; ce polynôme admet deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-2}{2\cdot 1}=\frac{-6}{2}=-3$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+2}{2\cdot 1}=\frac{-2}{2}=-1$$

Ainsi, le décnominateur admet la forme factorisée suivante :
$$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$$
On a la transformation algébrique suivant du quotient :
$$\frac{\sqrt{x+1}}{x^2+4x+3}=\frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}(x+3)}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto -1^+}\sqrt{x+1}=0^+\quad;\quad\lim_{x\mapsto -1^+}x+3=2$$
On en déduit la valeur suivante :
$$\lim_{x\mapsto -1^+}\frac{\sqrt{x+1}}{x^2+4x+3}=\lim_{x\mapsto -1^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}(x+3)}=+\infty$$

Correction 21

a. On a les deux limites :
$$\lim_{x\mapsto +\infty}x=+\infty\quad;\quad\lim_{x\mapsto +\infty}\sqrt{x}-1=+\infty$$
On en déduit :
$$\lim_{x\mapsto +\infty}x\sqrt{x}-x=\lim_{x\mapsto +\infty}x\left(\sqrt{x}-1\right)$$
$$=+\infty$$

b. Pour tout $x\in\left[0\,;2\right[$, le facteur $\sqrt{2x}+2$ est non-nul. On les transformations algébriques :
$$\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}=\frac{(x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{\left(\sqrt{2x}-2\right)\left(\sqrt{2x}+2\right)}$$
$$=\frac{(x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{\left(\sqrt{2x}\right)^2-2^2}=\frac{(x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{2x-4}$$
$$=\frac{(x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{2(x-2)}=\frac{\sqrt{2x}+2}{2}$$
On en déduit la limite :
$$\lim_{x\mapsto 2^-}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}=\lim_{x\mapsto 2^-}\frac{\sqrt{2x}+2}{2}=2$$

Correction 22

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :
$$x^2\geqslant 0$$
$$x^2+1\geqslant 1>0$$
$$x^2+1>0$$
Ainsi, la racine de x^2+1 existe et vérifie :
$$\sqrt{x^2+1}>0$$
Le dénominateur existant et étant non-nul sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $x\neq 0$, on a les transformations algébriques suivantes :
$$f(x)=\frac{2{\cdot}x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x{\cdot}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2{\cdot}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}=\frac{x{\cdot}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}{\cdot}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$$
$$=\frac{x{\cdot}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{|x|{\cdot}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$$

3. Etudions l'expression de la fonction f :

- au voisinage de $-\infty$:
$$f(x)=\frac{x{\cdot}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{|x|{\cdot}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{x{\cdot}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{-x{\cdot}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{2+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto -\infty}2+\frac{1}{x}=2\quad;\quad\lim_{x\mapsto -\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto -\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto -\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{2}{-1}=-2$$

- au voisinage de $+\infty$:
$$f(x)=\frac{x{\cdot}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{|x|{\cdot}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{x{\cdot}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{x{\cdot}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{2+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto +\infty}2+\frac{1}{x}=2\quad;\quad\lim_{x\mapsto +\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto +\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{2}{1}=2$$

Correction 23

En remarquant que le dénominateur s'annule en 3, on a la factorisation suivante :

$$2x^2-5x-3=2(x-3)\Big(x+\frac{1}{2}\Big)=(x-3)(2x+1)$$
Vérifions cette factorisation :
$(x-3)(2x+1)=2x^2+x-6x+1=2x^2-5x+1$

Ainsi, on a la transformation suivante :
$$\frac{\sqrt{3-x}}{2x^2-5x-3}=\frac{\sqrt{3-x}}{(x-3)(2x+1)}$$
Le nombre 3 n'appartient à l'ensemble de définition :
$$=\frac{\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{3-x}}{(x-3)(2x+1)\cdot\sqrt{3-x}}=\frac{3-x}{(x-3)(2x+1)\cdot\sqrt{3-x}}$$
$$=\frac{-(x-3)}{(x-3)(2x+1)\cdot\sqrt{3-x}}=\frac{-1}{(2x+1)\cdot\sqrt{3-x}}$$
On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto 3^-} 2x+1=7 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto 3^-}\sqrt{3-x}=0^+$
Ainsi, le dénominateur a pour limite :
$\lim\limits_{x\mapsto 3^-}(2x+1)\cdot\sqrt{3-x}=0^+$
Ainsi, on a la limite suivante du quotient :
$$\lim_{x\mapsto 3^-}\frac{\sqrt{3-x}}{2x^2-5x-3}=-\infty$$

Correction 24

a. Pour $x\neq 0$, on a les transformations algébriques :
$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}=\frac{\sqrt{x^2\cdot\Big(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)}}{x\cdot\Big(1-\frac{1}{x}\Big)}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\cdot\Big(1-\frac{1}{x}\Big)}=\frac{\sqrt{x^2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}=1$$
On a la limite : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}=\dfrac{1}{1}=1$

b. Pour $x\neq 0$, on a les transformations algébriques :
$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{\sqrt{x^2\cdot\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big)}}{x}=\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$
$$=\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$
Etudiant la limite en $-\infty$, supposons que x ne prenne que des valeurs négatives :
$$=\frac{-x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$
On a la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}1+\dfrac{1}{x^2}=1$

On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\mapsto-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1$$

Correction 25

Pour $x\neq 0$, on a la transformation algébrique suivante :
$$\frac{x}{\sqrt{4\cdot x^2-3x+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2\cdot\Big(4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)}}$$
$$=\frac{x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{x}{|x|\cdot\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$
La limite recherchée est pour x tendant vers $-\infty$, on considérer qu'on travaille sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$:
$$=\frac{x}{-x\cdot\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{-\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$
On a la limite :
$$\lim_{x\mapsto-\infty}-\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\sqrt{4}=-2$$
On en déduit :
$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x}{\sqrt{4\cdot x^2-3x+1}}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

Correction 26

1. Pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, il faut déterminer le signe du quotient $\dfrac{4x-4}{x+1}$ en fonction de la valeur de x.

   L'étude du signe de ce quotient passe par l'établissement du tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$4x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{4x-4}{x+1}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

   Comme une racine n'est définie que lorsque le terme sous son radical est positif ou nul, on en déduit que la fonction f est définie sur l'ensemble :
   $\mathcal{D}_f=\,]-\infty\,;-1[\,\cup\,[1\,;+\infty[$

2. Pour $x\neq 0$, on a la transformation algébrique suivante :
$$\sqrt{\frac{4x-4}{x+1}}=\sqrt{\frac{x\cdot\Big(4-\frac{4}{x}\Big)}{x\cdot\Big(1+\frac{1}{x}\Big)}}=\sqrt{\frac{4-\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}}}$$
   Etudions les limites de la fonction en $+\infty$ et $-\infty$:
   - On a les deux limites suivantes :
     $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}4-\dfrac{4}{x}=4 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty}1+\dfrac{1}{x}=1$
     On en déduit la limite suivante du quotient :
     $$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{4x-4}{x+1}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{4-\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}}=4$$
     Par l'utilisation de la limite d'une fonction composée, on obtient :
     $$\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{\frac{4x-4}{x+1}}=\sqrt{4}=2$$
   - De même, on montre que :
     $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\dfrac{4x-4}{x+1}=4$
     Ce qui permet d'obtenir la limite suivante :
     $$\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}\sqrt{\frac{4x-4}{x+1}}=\sqrt{4}=2$$

   On a les deux limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\mapsto-1^-}4x-4=-8 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto-1^-}x+1=0^-$
   On en déduit la limite suivante du quotient :

$$\lim_{x \mapsto -1^-} \frac{4x-4}{x+1} = +\infty$$

Par la limite d'une fonction composée, on en déduit la valeur suivante :

$$\lim_{x \mapsto -1^-} f(x) = \lim_{x \mapsto -1^-} \sqrt{\frac{4x-4}{x+1}} = +\infty$$

La fonction f est définie en 1 et on a :

$$f(1) = \sqrt{\frac{4\times1-4}{1+1}} = \sqrt{\frac{0}{2}} = \sqrt{0} = 0$$

3. Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes :

- Les deux limites suivantes assurent que la droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$:
  $\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 2$
- La droite d'équation $x=-1$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en -1 :
  $\lim_{x \mapsto -1^-} f(x) = +\infty$

Correction 27

1.
- Le point $J\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ; on en déduit :
  $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$
- $K(-1;0)\in\mathscr{C}$. on a : $f(-1)=0$
- $A\left(1;\frac{11}{4}\right)\in\mathscr{C}$. on a : $f(1) = \frac{11}{4}$
- $B(2;2)\in\mathscr{C}$. on a : $f(2) = 2$

Dans l'énoncé, on précise que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$; on en déduit la valeur suivante de la limite :

$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 1$

2.
- Au point A, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses ; ainsi, le coefficient directeur de cette tangente a pour valeur 0.
  Le point A a pour abscisse 1 ; on en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction f en 1 :
  $f'(1) = 0$.
- La droite (BT) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2. Le coefficient directeur de la droite (BT) est obtenue par le quotient :
  $\frac{y_T - y_B}{x_T - x_B} = \frac{0-2}{4-2} = -1$
  On en déduit la valeur de $f'(2)$:
  $f'(2) = -1$.

Correction 28

1. Le dénominateur du quotient définissant l'image $f(x)$ d'un nombre x par la fonction f est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-2)^2 - 4\times1\times5 = 4 - 20 = -16$

Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucun racine.

Le dénominateur de ce quotient ne s'annulant jamais, on a : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. a. Pour $x\neq0$, on a les transformations algébriques suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2+4x-1}{x^2-2x+5} = \frac{x^2\cdot\left(1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)} = \frac{1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}$$

Déterminons la limite de la fonction f en $+\infty$:

On a les deux limites :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} 1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \mapsto +\infty} 1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2} = 1$$

On en déduit la valeur de la limite :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

On en déduit la limite de la fonction f en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = 1$$

b. La fonction f admet une seule asymptote : la droite $y=1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. a. L'expression de la fonction f est définie par le quotient des fonctions u et v définies par :

$u(x) = x^2+4x-1$; $v(x) = x^2-2x+5$

qui admettent pour dérivées les fonctions :

$u'(x) = 2x+4$; $v'(x) = 2x-2$

Ainsi, la dérivée de la fonction f admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$= \frac{(2x+4)\cdot(x^2-2x+5) - (x^2+4x-1)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2}$$

$$= \frac{(2x^3-4x^2+10x+4x^2-8x+20)-(2x^3-2x^2+8x^2-8x-2x+2)}{(x^2-2x+5)^2}$$

$$= \frac{(2x^3+2x+20)-(2x^3+6x^2-10x+2)}{(x^2-2x+5)^2}$$

$$= \frac{2x^3+2x+20-2x^3-6x^2+10x-2}{(x^2-2x+5)^2}$$

$$= \frac{-6x^2+12x+18}{(x^2-2x+5)^2}$$

b. Pour dresser le tableau de signes de $f'(x)$, il suffit d'étudier le signe du numérateur du quotient définissant son expression car le dénominateur est strictement positif.

Le polynôme définissant son numérateur a pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 12^2 - 4\times(-6)\times18$

$144 + 432 = 576$

On a la simplification suivante : $\sqrt{576} = 24$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-12-24}{2\times(-6)} = \frac{-36}{-12} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-12+24}{2\times(-6)} = \frac{12}{-12} = -1$$

Ainsi, on obtient le tableau de signes de la fonction dérivée f' :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Variation de f	1	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{5}{2}$	↘	1

4. On a les deux valeurs :

- $f(1) = \dfrac{1^2+4\times1-1}{1^2-2\times1+5} = \dfrac{1+4-1}{1-2+5} = \dfrac{4}{4} = 1$
- $f'(1) = \dfrac{-6\times1+12\times1+18}{\left(1^2-2\times1+5\right)^2} = \dfrac{-6+12+18}{(1-2+5)^2}$

$$= \frac{24}{4^2} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

L'équation (Δ) a pour équation réduite :

$$y = f'(1)\cdot(x-1)+f(1)$$

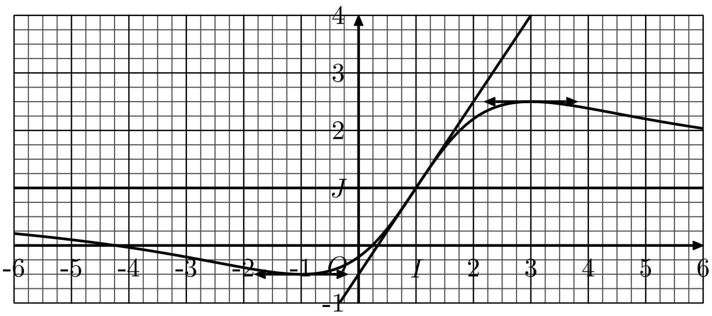
$$y = \frac{3}{2}\cdot(x-1)+1$$

$$y = \frac{3}{2}\cdot(x-1)+1$$

$$y = \frac{3}{2}\cdot x - \frac{3}{2} + 1$$

$$y = \frac{3}{2}\cdot x - \frac{1}{2}$$

5. Voici la représentation de la droite (Δ), de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de son asymptote :



Correction 29

1. Pour $x\neq0$, on a les transformations algébriques suivantes :

$$f(x) = \frac{x^3-4\cdot x^2+x+12}{4\cdot x^2+4} = \frac{x^3\cdot\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{12}{x^3}\right)}{x^2\cdot\left(4+\dfrac{4}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{x\cdot\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{12}{x^3}\right)}{4+\dfrac{4}{x^2}}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} x\cdot\left(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{12}{x^3}\right) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} 4+\frac{4}{x^2} = 4$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x\cdot\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{12}{x^3}\right)}{4+\dfrac{4}{x^2}} = +\infty$$

De la même manière, on en déduit la limite de la fonction f en $-\infty$:

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = -\infty$$

2. a. On a les transformations algébriques suivantes :

$$a\cdot x+b+\frac{16}{4\cdot x^2+4} = \frac{\left(a\cdot x+b\right)\cdot\left(4\cdot x^2+4\right)+16}{4\cdot x^2+4}$$

$$= \frac{4a\cdot x^3+4a\cdot x+4b\cdot x^2+4\cdot b+16}{4\cdot x^2+4}$$

$$= \frac{4a\cdot x^3+4b\cdot x^2+4a\cdot x+\left(4\cdot b+16\right)}{4\cdot x^2+4}$$

Par identification avec l'expression de l'image de x et puisque ces deux quotients ont le même dénominateur, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4a &=& 1 \\ 4b &=& -4 \\ 4a &=& 1 \\ 4b+16 &=& 12 \end{array}\right.$$

On remarque facilement que ce système admet un unique couple de solutions dont les valeurs sont :

$$a = \frac{1}{4} \quad ; \quad b = -1$$

On obtient l'identité recherchée :

$$f(x) = \frac{1}{4}\cdot x - 1 + \frac{16}{4\cdot x^2+16}$$

b. Pour étudier la position relative de la droite (d) et de la courbe $\mathscr{C}_f$, considérons la différence suivante :

$$f(x) - \left(\frac{1}{4}\cdot x-1\right) = \frac{1}{4}\cdot x - 1 + \frac{16}{4\cdot x^2+16} - \left(\frac{1}{4}\cdot x-1\right)$$

$$= \frac{16}{4\cdot x^2+16}$$

Ce quotient étant positive, on en déduit l'inégalité suivante :

$$\frac{16}{4\cdot x^2+16} \geqslant 0$$

$$f(x) - \left(\frac{1}{4}\cdot x-1\right) \geqslant 0$$

$$f(x) \geqslant \frac{1}{4}\cdot x - 1$$

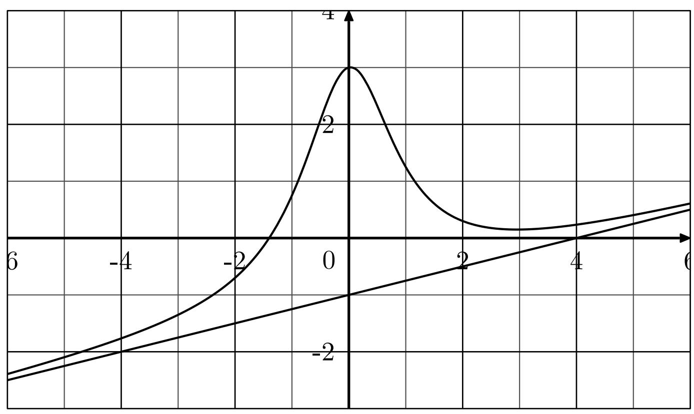
On déduit de la comparaison précédente que la courbe $\mathscr{C}_f$ se situe au dessus de la droite (d) sur $\mathbb{R}$.

3. On a la limite : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 4\cdot x^2+4 = +\infty$

On en déduit :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) - \left(\frac{1}{4}\cdot x-1\right) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{16}{4\cdot x^2+4} = 0$$

4. La courbe représentative de la fonction f est la courbe $\mathscr{C}_1$:



On observe que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la droite (d) et on observe qu'en "$+\infty$" la droite et la courbe se rejoindront.