Calcul d'intégrale

Exercice 5

Calculer les suivantes à l'aide d'une primitive :

1) $I=\int_0^4 (x-3)\,dx$

2) $I=\int_{-1}^2 (t^2-4t+3)\,dt$

3) $I=\int_1^2 \left(t^2+t-\frac{1}{t}\right)dt$

4) $I=\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx$

5) $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\,dx$

6) $I=\int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2}$

Exercice 6

Calculer les suivantes à l'aide d'une primitive :

1) $I=\int_0^4 dx$

2) $I=\int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x}\,dx$

3) $I=\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-4}\,dx$

4) $I=\int_1^2 \frac{1}{3x-2}\,dx$

5) $I=\int_0^1 5e^{3x}\,dx$

6) $I=\int_0^1 te^{t^2-1}\,dt$

Exercice 7

1) a) Trouver trois réel a, b et c tels que : $\frac{4x^2+7x+1}{x+2}=ax+b+\frac{c}{x+2}$

b) En déduire : $I=\int_0^2 \frac{4x^2+7x+1}{x+2}\,dx$

2) a) Prouver que pour tout réel x : $\frac{1}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}$

b) En déduire : $I=\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$

Intégration par parties

Exercice 8

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

1) $I=\int_1^e x\ln x\,dx$

2) $I=\int_1^{e^2} \ln t\,dt$

3) $I=\int_0^\pi (x-1)\cos x\,dx$

4) $I=\int_0^1 (x+2)e^x\,dx$

5) $I=\int_1^2 (t-2)e^{2t}\,dt$

6) $I=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Exercice 9

Trouver la primitive F sur I et nulle en a, des fonctions f suivantes à l'aide d'une intégration par partie

1) $f(t)=\ln(t^2)$ $\quad \mathrm{I}=]0;+\infty[$ $\quad a=1$

2) $f(t)=(2t+1)\sin t$ $\quad \mathrm{I}=\mathbb{R}$ $\quad a=0$

3) $f(t)=(t+1)^2e^{2t}$ $\quad \mathrm{I}=\mathbb{R}$ $\quad a=-1$ (on fera deux intégrations par partie).

4) $f(t)=(\ln t)^2$ $\quad \mathrm{I}=]0;+\infty[$ $\quad a=1$ (on fera deux intégrations par partie).

5) $f(t)=e^{-2t}\cos t$ $\quad \mathrm{I}=\mathbb{R}$ $\quad a=0$ (on fera deux intégrations par partie).

Encadrement et valeur moyenne

Exercice 10

Comparer sans calcul : $\mathrm{I}=\int_1^2 x\,e^x\,dx$ et $\mathrm{J}=\int_1^2 x^2\,e^x\,dx$

Exercice 11

Démontrer les encadrements suivants :

1) $2\leqslant \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx\leqslant 4$

2) $\sqrt{2}\leqslant \int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,dx\leqslant 3$

3) $\frac{1}{2}\leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt\leqslant 1$

4) $2e^{-4}\leqslant \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}}\,dx\leqslant 2$

5) $2\ln 3\leqslant \int_2^4 \ln(x^2-1)\,dx\leqslant 2\ln 3+2\ln 5$

Intégrale et suite

Exercice 20

La suite (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n=\int_0^1 (1+t^n)\,dt$

1) Prouver que la suite (I_n) est décroissante.

2) Est-elle convergente ?

Exercice 21

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n=\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$

1) Montrer que la suite (I_n) est convergente et calculer sa limite

2) Soit $u_n=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; Montrer que la suite (u_n) est divergente