1 On considère le cube $ABCDEFGH$.

1 Démontrer que le triangle EGB est équilatéral.

2 Soit K le centre de gravité du triangle EGB et M un point quelconque du segment $[FK]$. Démontrer que la section du cube par le plan passant par M et parallèle au plan (EGB) est un triangle équilatéral.

2 $ABCD$ est un tétraèdre et I est le milieu de $[BC]$. On considère les points J, K et L milieux respectifs des segments $[AI]$, $[DI]$ et $[AD]$.

1 Démontrer que les droites (JK) et (AD) sont parallèles.

2 **a.** Déterminer, en justifiant sa construction, la section du tétraèdre par le plan (JKL).

b. Déterminer de même la section du tétraèdre par le plan (JKG), où G est le point de $[CD]$ tel que : $CG = \frac{2}{3}CD$.

3 On considère une pyramide $SABCD$ de base $ABCD$. Les points T, U et V sont les centres de gravité respectifs des faces SAB, SBC et SCD. Déterminer la section de la pyramide par le plan (TUV).
Comparer avec le résultat de l'exercice corrigé ci-dessus.

Aide Établir que (TU) et (AC) sont parallèles.

4 On considère le tétraèdre $ABCD$.

1 Construire les points G et E définis par :

$$\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

2 Démontrer que les droites (BC) et (FE) sont parallèles.

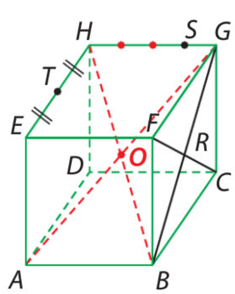
3 Soit G le point défini par $\overrightarrow{EG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$.

a. Que peut-on dire des plans (BCD) et (EFG) ?

b. Justifier que G appartient à la droite (AD).

c. Démontrer que les droites (BD) et (GF) sont parallèles.

5 Identifier I, J, K, L, M et N définis par les relations vectorielles suivantes sur la figure ci-contre où $ABCDEFGH$ est un cube.



$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$; $\quad \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}$;

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{FB}$;

$\overrightarrow{GL} = \overrightarrow{GE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$;

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$;

$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BO} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BR}$.

Voir exercices 35 à 45

8 $ABCDEFGH$ est un pavé droit. I désigne le milieu du segment $[AB]$, J est tel que :

$$\overrightarrow{HJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

et O est le centre de la face $BCGF$.

1 Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires.

2 Démontrer que les droites (IH) et (JO) sont parallèles en utilisant une décomposition sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

10 Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on donne les points $A(1\,;2\,;-1)$ et $B(2\,;4\,;-4)$.

1 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2 **a.** Démontrer que la droite (AB) et l'axe $(O, \vec{k})$ sont sécants. Préciser les coordonnées du point commun K.

b. Déterminer des représentations paramétriques du segment $[AB]$ et de la demi-droite $[BK)$.

23 On considère un cube $ABCDEFGH$. Les points I, J et K sont respectivement les milieux des segments $[BF]$, $[EH]$ et $[HD]$. Dans chaque cas, donner la position relative des droites ou plans considérés :

a. les droites (DG) et (EA) ;

b. les droites (JK) et (FC) ;

c. le plan (EFC) et la droite (JK) ;

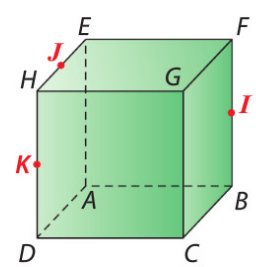
d. les plans (EKG) et (AIC) ;

e. le plan (BCK) et la droite (EI) ;

f. les plans (GHK) et (AIC) ;

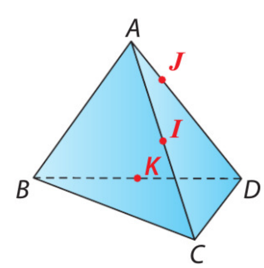
g. le plan (AIC) et la droite (FG) ;

h. les droites (FK) et (BD).



Conseil Pour bien voir un plan défini par trois points dans l'espace, il est souvent utile d'en voir quatre.
Par exemple, le plan (EFC) est le plan $(EFCD)$.

24 Dans le tétraèdre $ABCD$ ci-contre, I est le milieu de $[AC]$, J est un point de $[AD]$ et K est le milieu de $[BD]$. Dans chaque cas, donner la position relative des droites ou plans considérés.



a. les droites (IJ) et (AB) ;

b. les droites (IK) et (AB) ;

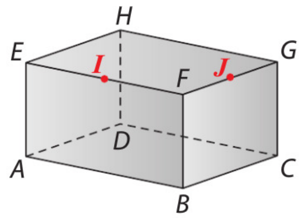
c. le plan (BIJ) et la droite (AK) ;

d. les plans (BIJ) et (AKD) ;

e. le plan (BIK) et la droite (CD) ;

f. les plans (BIJ) et (AKC).

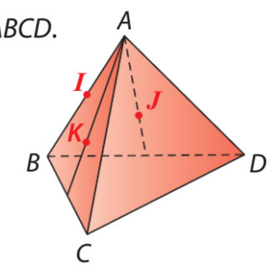
25 Dans le pavé droit *ABCDEFGH* ci-dessous, les points I et J sont les milieux des segments $[EF]$ et $[FG]$.



1 Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.

2 Déterminer l'intersection des plans (BIJ) et (ABC).

26 On considère un tétraèdre *ABCD*. I est le milieu du segment $[AB]$, J et K sont les centres de gravité respectifs des triangles *ABD* et *ABC*.



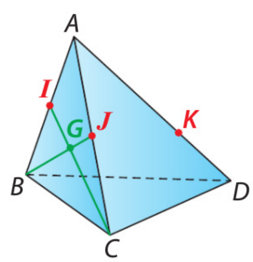
1 Démontrer que les points C, D, I, J et K sont coplanaires.

2 Quelle est la nature du quadrilatère *CKJD* ?

3 Justifier que les droites (CJ) et (DK) sont sécantes.

27 Dans un tétraèdre *ABCD*, I est le milieu de $[AB]$, J est le milieu de $[AC]$ et K appartient au segment $[AD]$ tel que :

$$AK = \frac{2}{3}AD.$$



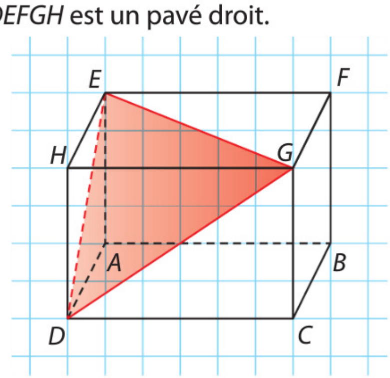
Les droites (CI) et (BJ) se coupent au point G.

1 Le plan (AGD) et la droite (BC) sont sécants. En quel point ?

2 Déterminer l'intersection des plans (AGD) et (BCD).

3 Étudier la position relative de la droite (GK) et du plan (BCD).

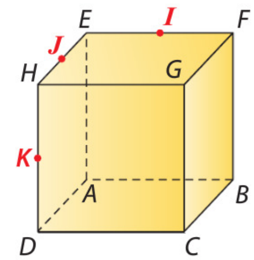
28 *ABCDEFGH* est un pavé droit.



1 Déterminer l'intersection des plans (EDG) et (ABC).

2 En déduire l'intersection de la droite (BC) et du plan (EDG).

29 On considère un cube *ABCDEFGH*. Les points I, J et K sont respectivement les milieux de $[EF]$, $[EH]$ et $[HD]$.



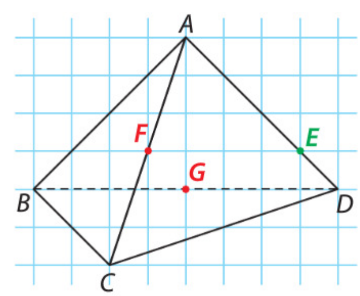
1 Préciser les intersections du plan (IJK) avec les plans (EFG) et (AED).

2 Les droites (JK) et (AE) sont sécantes en un point L. Justifier que les plans (IJK) et (AEB) sont sécants selon la droite (IL).

3 Montrer que les plans (IJK) et (CDG) sont sécants selon une droite parallèle à la droite (IL).

4 Terminer la construction de la section du cube par le plan (IJK).

30 Sur la figure ci-dessous, E est un point du segment $[AD]$ distinct du milieu de $[AD]$, F et G sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.



1 Reproduire la figure sur un quadrillage.

2 **a.** Justifier que les droites (EF) et (CD) sont sécantes en un point I. Le construire.

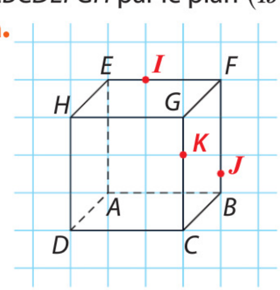
b. En déduire l'intersection des plans (EFG) et (BCD).

3 On note J le point d'intersection des droites (BC) et (GI).
Déterminer l'intersection des plans (EFG) et (ABC).

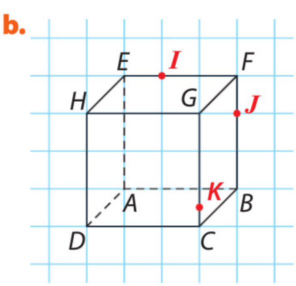
4 En déduire la section du tétraèdre par le plan (EFG).

31 Déterminer dans chaque cas, la section du cube *ABCDEFGH* par le plan (IJK).

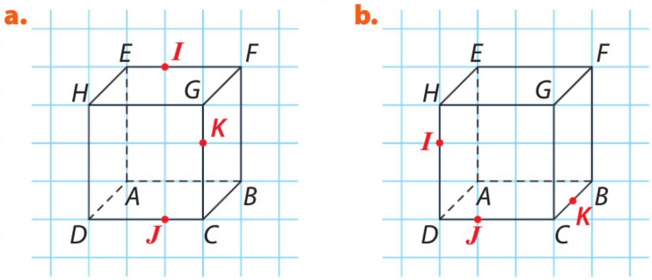
a.



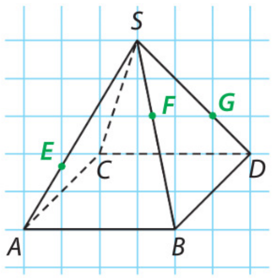
b.



32 Déterminer dans chaque cas, la section du cube *ABCDEFGH* par le plan (IJK).



33 Sur la figure ci-dessous, les points *E*, *F* et *G* appartiennent respectivement aux segments $[SA]$, $[SB]$ et $[SD]$.



1 Reproduire la figure.

2 Construire l'intersection des plans (EFG) et (ABC).

3 En déduire la section de la pyramide *SABDC* par le plan (EFG).

34 On considère la pyramide *SABDC* de l'exercice précédent, avec les points *E* et *F* milieux respectifs de $[SA]$ et $[SB]$, et *G* sur le segment $[SD]$ tel que $SG = \frac{2}{3}SD$.
Déterminer la section de la pyramide *SABDC* par le plan (EFG).