***Ex 1 : (**)** - Calculs d'intégrales (méthodes post-BAC)*

$I_1=\int_2^5 \frac{x}{x-1}.dx$ ; on pose $f(x)=\frac{x}{x-1}$ donc $f(x)=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$

donc $F(x)=x+\ln(x-1)$ donc $I_1=3+F(5)-F(2)=3+2\ln 2$

$I_2=\int_2^4 \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}.dx$ ; on pose $f(x)=\frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$ ; on cherche une décomposition en éléments simples : $f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{(x+1)^2}$ où $a,b\in\mathbb{R}$

on a : $(x-1)^2 f(x)=\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}=a+\frac{b(x-1)^2}{(x+1)^2}$ ; si $x=1$ alors $a=\frac{3}{4}$

on a : $(x+1)^2 f(x)=\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}=\frac{a(x+1)^2}{(x-1)^2}+b$ ; si $x=-1$ alors $b=\frac{1}{4}$

donc $f(x)=\frac{0{,}75}{(x-1)^2}+\frac{0{,}25}{(x+1)^2}$ donc $F(x)=\frac{-0{,}75}{x-1}-\frac{0{,}25}{x+1}$

donc $I_2=F(4)-F(2)=\frac{8}{15}$

$I_3=\int_5^6 \frac{x^4+x^3-13x^2-27x+8}{x^2-2x-8}.dx$ soit $f(x)=\frac{x^4+x^3-13x^2-27x+8}{x^2-2x-8}$

On applique une division Euclidienne :

$$\begin{array}{r|l}
x^4+x^3-13x^2-27x+8 & x^2-2x-8 \\
\cline{2-2}
-x^4+2x^3+8x^2 & x^2+3x+1 \\
\hline
0x^4+3x^3-5x^2-27x & \\
-3x^3+6x^2+24x & \\
\hline
0x^3+x^2-3x+8 & \\
-x^2+2x+8 & \\
\hline
0x^2-x+16 &
\end{array}$$

donc $f(x)=x^2+3x+1+\frac{-x+16}{x^2-2x-8}$ on pose $g(x)=\frac{-x+16}{x^2-2x-8}$

donc $g(x)=\frac{-x+16}{(x-2)(x-4)}=\frac{a}{x-4}+\frac{b}{x+2}$ où $a,b\in\mathbb{R}$

or : $\frac{a}{x-4}+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+2)+b(x-4)}{x^2-2x-8}=\frac{(a+b)x+2a-4b}{x^2-2x-8}$

par identification des termes :

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ 2a-4b=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ a-2b=8 \end{cases} \overset{(1)-(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3b=-9 \\ a=-1-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3 \\ a=2 \end{cases}$$

donc $g(x)=\frac{2}{x-4}-\frac{3}{x+2}$ donc $G(x)=2\ln(x-4)-3\ln(x+2)$

d'où $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x+2\ln(x-4)-3\ln(x+2)$

donc on obtient $I_3=F(6)-F(5)=\frac{287}{6}+2\ln(2)-3\ln(\frac{8}{3})$

$I_4=\int_0^{\pi}(\sin(x)+x.\cos(x)).dx$ ; on pose $f(x)=\sin(x)+x.\cos(x)$

alors on vérifie que $F(x)=x.\sin(x)$ est une primitive de $f(x)$

car $F'(x)=f(x)$ donc $I_4=F(\pi)-F(0)=0$

$I_5=\int_1^2 \frac{1-\ln x}{x^2}.dx$ ; on pose $f(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ ; on cherche $F$ telle que $F'(x)=f(x)$ ; on vérifie que $F(x)=\frac{\ln x}{x}$ convient

donc $I_5=F(2)-F(1)=\frac{\ln 2}{2}$

$I_6=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}.dx$ ; on pose $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ; on utilise le théorème de dérivation d'une fonction réciproque : $(g^{-1}(x))'=\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$

soit $g(x)=\tan(x)$ donc $g^{-1}(x)=\arctan(x)$ ; on a $g'(x)=1+\tan^2(x)$

donc $(g^{-1}(x))'=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}=\frac{1}{1+x^2}=f(x)$ donc $F(x)=\arctan(x)$

ainsi $I_6=\arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}$

***Ex 2 : (**) - Avec une intégration par parties (IPP)***

Rappel de la formule de l'IPP : $\int u'.v=[u.v]-\int u.v'$

$I_1=\int_1^4 \ln(x).dx$ ; on pose $u=\ln(x)$ et $v'=1$ donc $u'=\frac{1}{x}$ et $v=x$

donc $I_1=[x.\ln(x)]_1^4-\int_1^4 1.dx=[x.\ln(x)-x]_1^4=4\ln(4)-3=8\ln(2)-3$

$I_2=\int_1^4 x.\ln(x).dx$ ; on pose $u=\ln(x)$ et $v'=x$ donc $u'=\frac{1}{x}$ et $v=\frac{x^2}{2}$

donc $I_2=[0{,}5x^2.\ln(x)]_1^4-\int_1^4 0{,}5x.dx=[\frac{x^2}{2}.\ln(x)-\frac{x^2}{4}]_1^4=8\ln(4)-\frac{15}{4}$

$I_3=\int_1^4 x^2.\ln(x).dx$ ; on pose $u=\ln(x)$ , $v'=x^2$ donc $u'=\frac{1}{x}$ , $v=\frac{x^3}{3}$

donc $I_3=[\frac{x^3}{3}.\ln(x)]_1^4-\int_1^4 \frac{x^2}{3}.dx=[\frac{x^3}{3}.\ln(x)-\frac{x^3}{9}]_1^4=\frac{64}{3}\ln(4)+\frac{65}{9}$

$I_4=\int_0^1 xe^x.dx$ ; on pose $u=x$ , $v'=e^x$ donc $u'=1$ , $v=e^x$

donc $I_3=[x.e^x]_0^1-\int_0^1 e^x.dx=[(x-1)e^x]_0^1=1$

*<u>Rque</u>* : une variante de méthode consiste à poser $f(x)=xe^x$ et chercher $F(x)=(ax+b)e^x$ telle que $F'(x)=f(x)$ ; on trouve $a=1$ et $b=-1$

(*double IPP*) --> $I_5=\int_1^2 x^2.\ln^2(x).dx$

on pose $u=\ln^2(x)$ , $v'=x^2$ donc $u'=\frac{2\ln x}{x}$ , $v=\frac{x^3}{3}$

donc $I_5=[\frac{x^3}{3}.\ln^2(x)]_1^2-\frac{2}{3}\int_1^2 x^2\ln(x).dx$ ; on utilise l'IPP de $I_3$

donc $I_5=[\frac{x^3}{3}.\ln^2(x)]_1^2-\frac{2}{3}[\frac{x^3}{3}.\ln(x)-\frac{x^3}{9}]_1^2=\frac{8}{3}\ln^2(2)-\frac{16}{9}\ln(2)+\frac{14}{27}$

$I_6=\int_0^1 (1+x^2).e^{2x}.dx$ ; on pose $u=1+x^2$ , $v'=e^{2x}$

donc $u'=2x$ , $v=\frac{e^{2x}}{2}$ donc $I_6=[\frac{1+x^2}{2}.e^{2x}]_0^1-\int_0^1 x.e^{2x}dx$

On calcule alors l'intégrale $I_7=\int_0^1 x.e^{2x}.dx$

on pose $u=x$ , $v'=e^{2x}$ donc $u'=1$ , $v=\frac{e^{2x}}{2}$

donc $I_7=[\frac{x}{2}.e^{2x}]_0^1-\int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}dx=\frac{e^2}{2}-[\frac{e^{2x}}{4}]_0^1=\frac{e^2+1}{4}$

d'où $I_6=e^2-\frac{1}{2}-I_7=\frac{3(e^2-1)}{4}$

***Ex 3* : (**) - *Avec des changements de variables***

$I_1=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}.dx$ *; il s'agit en fait de calculer l'aire d'un demi-disque*

On peut penser à la relation $\sin^2 t+\cos^2 t=1 \iff \cos^2 t=1-\sin^2 t$

On pose $x=\sin t$ et comme $x\in[0\,;\,1]$ on peut prendre $t\in\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction sin est bijective et monotone de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0\,;1]$.

$dx=\cos t\,dt$, $\sqrt{1-x^2}=|\cos t|=\cos t$ et $\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}$

On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}(\cos t\,dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t(\cos t\,dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\left[\frac{1}{2}t+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\sin\pi}{4}-0-0\\ &=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$I_2=\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2+2x}}.dx$ ; on pose la fonction $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2+2x}}$

on observe que $f$ est définie et continue sur $[1;2]$
donc $f$ admet une primitive $F$ sur $[1;2]$
donc $f$ est intégrable au sens de *Riemann*

Déterminer une primitive de la fonction $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2+2x}} \quad \text{on pourra poser } x=\frac{1}{t}$$

Soit $F$ une primitive de $f$, on a alors : $F(x)=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x}}$

La fonction inverse est bijective et monotone de $]0\,;+\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$.

$$\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t,\quad \text{d'où } F(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x}}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}}}=\int\frac{-\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2t}}$$

$$\frac{u'}{\sqrt{u}}\overset{\int}{\Rightarrow}2\sqrt{u},\quad \text{on a alors}\quad \frac{-1}{\sqrt{1+2t}}=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{1+2t}}\overset{\int}{\Rightarrow}-\sqrt{1+2t}$$

On revient alors à l'ancienne variable : $-\sqrt{1+2t}=-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}=-\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$

Une primitive de $f$ est donc : $F(x)=-\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$

donc $\quad I_2=F(2)-F(1)=-0{,}5\sqrt{8}+\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

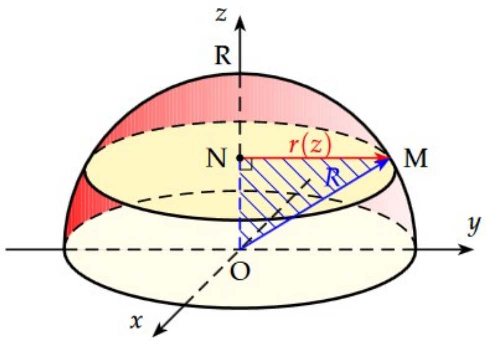
$$I_3=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}.dx \quad ;\text{ on pose}\quad u=\sin(x)\quad \text{sur}\quad [0\,;\frac{\pi}{2}]$$

donc $\quad du=\cos(x).dx\quad$ donc $\quad I_3=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}.dx=\int_0^1\frac{1}{1+u^2}.du=\frac{\pi}{4}$

## *Ex 4 : (**) - Calculs d'Aires & Volumes*

Compte tenu de la symétrie de la sphère, on calcule le volume d'une demi-sphère qu'on multipliera ensuite par 2.
On découpe ainsi la demi-sphère avec des plan perpendiculaires à l'axe (Oz). Les surfaces obtenues sont alors des cercles de rayon $r(z)$. La surface de ces cercles $S(z)$ vaut :

$$S(z)=\pi\,r^2(z)$$




Il reste donc à déterminer le rayon $r(z)$ en fonction de $z$ à l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle OMN rectangle en $\mathrm{N}(0,0,z)$ :

$$r^2(z)=R^2-z^2$$

On obtient alors le demi volume de la sphère :

$$\frac{1}{2}V=\int_0^R S(z)\mathrm{d}z=\int_0^R\pi(R^2-z^2)\mathrm{d}z=\pi\left[R^2z-\frac{z^3}{3}\right]_0^R=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi R^3$$

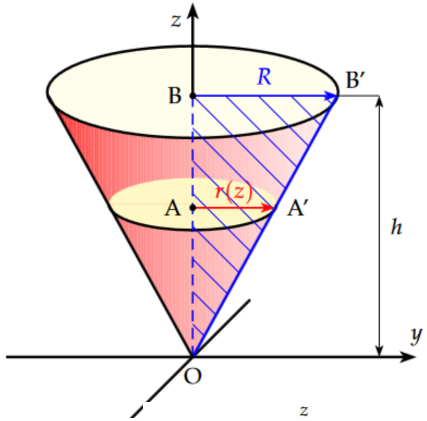
On retrouve alors le volume de la sphère : $\mathrm{V}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

On découpe le cône d'axe (Oz) avec des plans perpendiculaires à l'axe (Oz). Les surfaces obtenues sont alors des cercles de rayon $r(z)$.
Il reste donc à déterminer le rayon $r(z)$ en fonction de $z$ à l'aide du théorème de Thalès dans les triangles : OBB′ et OAA′, on a avec $\mathrm{A}(0,0,z)$ :

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{BB'}}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{z}{h}=\frac{r(z)}{R}\quad\Leftrightarrow\quad r(z)=\frac{Rz}{h}$$

On obtient ainsi le volume du cône :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}&=\int_0^h\pi\,r^2(z)\,\mathrm{d}z=\int_0^h\pi\frac{R^2z^2}{h^2}\mathrm{d}z\\&=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^2\mathrm{d}z=\frac{\pi R^2}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h\\&=\frac{\pi R^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right)=\frac{1}{3}\pi R^2h\end{aligned}$$




On retrouve ainsi le volume du cône : $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h$

$$V=\int_a^b\pi\,.f^2(z).dz\quad\text{avec}\quad f(z)=\frac{10}{1+4z^2}$$

donc $\quad V=100\,\pi\displaystyle\int_a^b\frac{1}{(1+4z^2)^2}.dz\quad$ avec une IPP

on obtient $\quad V=100\,\pi\left[\dfrac{x}{2(1+4z^2)}+\dfrac{\arctan(2z)}{4}\right]_a^b$