Ex 1 : (**) - Calculs d'intégrales (méthodes post-BAC)

$I_1=\int_0^{\pi/2}\cos^2(x).\sin^2(x).dx$ (linéariser $\sin^2(x)$ et $\cos^2(x)$)

soit $f(x)=\cos^2(x).\sin^2(x)$ or $\sin^2(x)=\frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ et

$\cos^2(x)=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ donc $f(x)=\frac{1}{4}(1-\cos^2(2x))=\frac{1}{8}(1-\cos(4x))$

donc $F(x)=\frac{1}{8}(x-\frac{1}{4}\sin(4x))=\frac{x}{8}-\frac{\sin(4x)}{32}$ donc $I_1=\frac{\pi}{16}$

$I_2=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.dx$ (utiliser $F(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$)

$F'(x)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ donc $I_2=\ln(2+\sqrt{3})-\ln(\sqrt{2}-1)$

$I_3=\int_2^5\frac{1}{x(x^2-1)}.dx$ (décomposer en éléments simples)

soit $f(x)=\frac{1}{x(x^2-1)}=\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$

$xf(x)=\frac{1}{x^2-1}=a+\frac{bx}{x-1}+\frac{cx}{x+1}$ si $x=0$ alors $a=-1$

$(x-1)f(x)=\frac{1}{x^2+x}=\frac{a(x-1)}{x}+b+\frac{c(x-1)}{x+1}$ si $x=1$ alors $b=\frac{1}{2}$

$(x+1)f(x)=\frac{1}{x^2-x}=\frac{a(x+1)}{x-1}+\frac{b(x+1)}{x-1}+c$ si $x=-1$ alors $c=\frac{1}{2}$

donc $f(x)=\frac{-1}{x}+\frac{0{,}5}{x-1}+\frac{0{,}5}{x+1}$ donc $F(x)=-\ln(x)+0{,}5\ln(x^2-1)$

ainsi $I_3=\ln(0{,}4)+0{,}5\ln(24)$

$I_4=\int_0^2\frac{1}{x^2-4x-5}.dx$ (décomposer en éléments simples)

soit $f(x)=\frac{1}{x^2-4x-5}=\frac{1}{(x+1)(x-5)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-5}=\frac{(a+b)x-5a+b}{x^2-4x-5}$

par identification on obtient $a+b=0$ et $-5a+b=1$

donc $a=\frac{-1}{6}$ et $b=\frac{1}{6}$ donc $f(x)=\frac{1}{6}(\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x-5})$

donc $F(x)=\frac{1}{6}\ln(\frac{5-x}{x+1})$ donc $I_4=\frac{-\ln 5}{6}$

$I_5=\int_0^2\frac{1}{x^2+4x+5}.dx$ (utiliser une forme canonique et $\int\frac{1}{u^2+1}$)

soit $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+5}=\frac{1}{(x+2)^2+1}$; on pose u=x+2 donc dx=du

alors $I_5=\int_2^4\frac{1}{1+u^2}.du=[\arctan(u)]_2^4=\arctan(4)-\arctan(2)$

$I_6=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}.dx$ (poser $u=\sin(x)$ puis décomposer en éléments simples)

on pose $u=\sin(x)$ donc $du=\cos(x).dx$ donc $I_6=\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{1}{2-u^2}.du$

soit $f(u)=\frac{1}{2-u^2}=\frac{a}{\sqrt{2}-u}+\frac{b}{\sqrt{2}+u}$ donc $a=b=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

donc $f(u)=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}-u}+\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+u}})$

donc $F(u)=\frac{\ln(2-u^2)}{2\sqrt{2}}$ donc $I_6=\frac{\ln(0{,}75)}{2\sqrt{2}}$

$I_7=\int_{\ln 3}^{3\ln 2}\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}.dx$ (poser $u=\sqrt{e^x+1}$ puis décomposer en éléments simples)

on pose $u=\sqrt{e^x+1}$ donc $du=\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}.dx$ donc $I_7=\int_2^3\frac{1}{u^2-1}.du$

soit $f(u)=\frac{1}{u^2-1}=\frac{0,5}{u-1}-\frac{0,5}{u+1}$ donc $F(u)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)$

donc $I_7=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$I_8=\int_2^4 \frac{1}{x(x^4-1)}.dx$ (poser $u=x^4$ puis décomposer en éléments simples)

on pose $u=x^4$ donc $du=4x^3.dx$ donc $I_8=\int_{16}^{256}\frac{1}{4u(u-1)}.du$

on pose $f(u)=\frac{1}{4u(u-1)}=\frac{a}{u}+\frac{b}{u-1}$ on obtient $f(u)=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{u}+\frac{1}{u-1}\right)$

donc $F(u)=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{u-1}{u}\right)=\frac{1}{4}\ln\left(1-\frac{1}{u}\right)$

donc $I_8=\frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{255}{256}\right)-\ln\left(\frac{15}{16}\right)\right)=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{17}{16}\right)$

***Ex 2 : (**)** - Avec une relation de récurrence*

1) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n(x).dx$
   a) Calculer les valeurs exactes de I_0 , I_1 et I_2
   b) Montrer que : $\forall n\geqslant 2$, $I_n=\frac{n-1}{n}\times I_{n-2}$
   c) En déduire les valeurs de I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de n

On obtient $I_0=\int_0^{\pi/2}1.dx=\frac{\pi}{2}$; $I_1=\int_0^{\pi/2}\sin(x).dx=[-\cos(x)]_0^{\pi/2}=1$

et $I_2=\int_0^{\pi/2}\sin^2(x).dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos(2x)).dx=\frac{1}{2}[x-0,5\sin(2x)]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$

Soit $n\geqslant 2$; $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n(x).dx=\int_0^{\pi/2}\sin(x).\sin^{n-1}(x).dx$

alors on effectue une IPP en posant $u'=\sin(x)$ et $v=\sin^{n-1}(x)$
donc $u=-\cos(x)$ et $v'=(n-1).\cos(x).\sin^{n-2}(x)$

donc $I_n=[-\cos(x).\sin^{n-1}(x)]_0^{\pi/2}+(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^2(x).\sin^{n-2}(x).dx$

donc $I_n=(n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2(x)).\sin^{n-2}(x).dx$

donc $I_n=(n-1)\int_0^{\pi/2}(\sin^{n-2}(x)-\sin^n(x)).dx$

donc $I_n=(n-1).I_{n-2}-(n-1).I_n$ donc $I_n=\frac{n-1}{n}\times I_{n-2}$

Ainsi par un raisonnement par récurrence, on déduit que pour $n\geqslant 1$:

$$I_{2n}=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\times\frac{\pi}{2}\quad I_{2n+1}=\frac{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}\times\frac{1}{2n+1}$$

__Compléments__ : La suite (nI_nI_{n-1}) est constante car
$nI_n=(n-1)I_{n-2}$ donc $nI_{n-1}I_n=(n-1)I_{n-2}I_{n-1}=1\times I_0\times I_1=\frac{\pi}{2}$

La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc (I_n) converge (vers 0)
de plus si $n\to+\infty$ alors $I_n\sim I_{n-1}$ donc $nI_n^2\sim\frac{\pi}{2}$ donc $I_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

---

2) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $I_n=\int_0^{+\infty}x^n.e^{-x}.dx$
   a) Calculer les valeurs exactes de I_0 , I_1 et I_2
   b) Montrer que : $\forall n\geqslant 1$, $I_n=n\times I_{n-1}$
   c) En déduire la valeur de I_n en fonction de n

On obtient $I_0=\int_0^{+\infty}e^{-x}.dx=[-e^{-x}]_0^{+\infty}=-0+1=1$

$I_1=\int_0^{+\infty}x.e^{-x}.dx=[-x.e^{-x}]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}.dx=\int_0^{+\infty}e^{-x}.dx=1$

$I_2=\int_0^{+\infty}x^2.e^{-x}.dx=[-x^2.e^{-x}]_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}x.e^{-x}.dx=2\int_0^{+\infty}x.e^{-x}.dx=2$

on effectue une IPP en posant $u=x^n$ et $v'=e^{-x}$
donc $u'=nx^{n-1}$ et $v=-e^{-x}$

donc $I_n=\int_0^{+\infty}x^n.e^{-x}.dx=[-x^n.e^{-x}]_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}.e^{-x}.dx=n.I_{n-1}$

Ainsi par un raisonnement par récurrence, on déduit que pour $n\geqslant 1$:

$I_n=nI_{n-1}=n(n-1)I_{n-2}=\cdots=n(n-1)(n-2)\cdots1\times I_0=n!$