Math-Hor
mathématiques secondaires

تصحيح الامتحان الوطني في الرياضيات
الدورة الاستدراكية 2012

ذ: الحسن

التمرين الأول

1) أ- لدينا: $\vec{AB}(3,0,-3)$ و $\vec{AC}(3,2,-2)$ إذن:

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 6\vec{i} - (-6+9)\vec{j} + 6\vec{k} = \boxed{6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}}$$ إذن:

ب- $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ هي المتجهة المنظمية للمستوى (ABC) إذن معادلتها تكتب على الشكل التالي: $6x-3y+6z+d=0$ وحيث: $A\in(ABC)$ إذن: $6(-3)-3(0)+6(0)+d=0$ أي $d=18$ ومنه

معادلة للمستوى (ABC) هي: $6x-3y+6z+18=0$ وبتقسيم الطرفين على 3 نحصل على المعادلة: $\boxed{2x-y+2z+6=0}$

ب- لدينا: $d(\Omega,(ABC)) = \dfrac{|2(1)-(-1)+2(1)+6|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \dfrac{|9|}{\sqrt{9}} = \boxed{3}$

وبما أن $\boxed{d(\Omega,(ABC)) = R}$ إذن المستوى (ABC) مماس للكرة (S)

2) أ- بما أن (D) عمودي على (ABC) فإن (D) موجه بالمتجهة المنظمية للمستوى (ABC) أي: $\boxed{\vec{n}(2,-1,2)}$

وحيث (D) يمر من $\Omega(1,1,1)$ فإن تمثيله البارامتري يكتب على الشكل:

$$\boxed{(D):\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = 1+2t \end{cases}}$$ $t\in\mathbb{R}$.

ب- لتكن $H(x,y,z)$ نقطة تماس (ABC) و (S)

وحيث أن: (D) مار من Ω وعمودي على (ABC) فإن H هي نقطة تقاطع (D) و (ABC) أي أن إحداثيات H تحقق التمثيل البارامتري لـ (D) والمعادلة الديكارتية لـ (ABC).

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = 1+2t \end{cases} \quad (1) \qquad \text{و} \qquad 2x-y+2z+6=0 \quad (2)$$

نعوض (1) في (2) فنجد: $2(1+2t)-(1-t)+2(1+2t)+6=0$

أي: $2+4t-1+t+2+4t+6=0$

يعني: $9t+9=0$ أي $t=-1$ ونعوض قيمة t في (1) فنجد

$$H:\begin{cases} x = 1-2 = -1 \\ y = 1+1 = 2 \\ z = 1-2 = -1 \end{cases}$$

ومنه $\boxed{H(-1,2,-1)}$.

التمرين الثاني

1) أ- $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{8+3i-2+i}{6-7i-2+i} = \dfrac{6+4i}{4-6i} = \dfrac{6+4i}{4-6i}\times\dfrac{i}{i} = \dfrac{6+4i}{4i+6}\times i = \boxed{i}$

ب- من خلال السؤال 1) أ- لدينا: $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = |i| = 1$ أي $|c-a| = |b-a|$ أي $AC = AB$

أي أن ABC متساوي الساقين في A وحيث: $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \arg(i)\ [2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

إذن: ABC قائم الزاوية في A ومنه ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A.

ملاحظة: يمكن أيضا الكتابة بالشكل الأسي $i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$

$AB = AC$ $\quad (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

2) أ- لدينا Ω منتصف $[BC]$ إذن: $\omega = \dfrac{b+c}{2}$ ومنه $\omega = \dfrac{6-7i+8+3i}{2} = \dfrac{14-4i}{2} = \boxed{7-2i}$

ب- لدينا: $\boxed{z'-\omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-\omega)}$ إذن: $z'-7+2i = -i(z-7+2i)$

إذن: $z' = -iz+7i+2+7-2i = -iz+5i+9 = \boxed{-iz+9+5i}$

ج- لنبين أن: $\boxed{c = -ia+9+5i}$ لدينا: $-i(2-i)+9+5i = -2i-1+9+5i$

$= 3i+8 = 8+3i = c$

إذن C صورة A بالدوران R.

التمرين الثالث

1) لدينا: من أجل $n=0$: $\boxed{u_0 = 3 > 1}$ إذن العبارة صحيحة من أجل $n=0$

نفترض أن العبارة صحيحة من أجل n أي $u_n > 1$ ونبين أنها صحيحة من أجل $n+1$ أي نبين أن: $u_{n+1} > 1$

لدينا: $u_{n+1} - 1 = \dfrac{4u_n+3}{3u_n+4} - 1 = \dfrac{4u_n+3-3u_n-4}{3u_n+4} = \dfrac{u_n-1}{3u_n+4} > 0$

لأن $u_n > 1$ إذن: $u_n - 1 > 0$ و $3u_n+4 > 0$ ومنه $u_{n+1}-1 > 0$ أي $u_{n+1} > 1$

وبالتالي $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}:\ u_n > 1}$

2) أ- ليكن $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $1 - v_n = 1 - \dfrac{u_n-1}{u_n+1} = \dfrac{\cancel{u_n}+1-\cancel{u_n}+1}{u_n+1} = \boxed{\dfrac{2}{u_n+1}}$

وحيث أن $2>0$ و $u_n+1>0$ فإن: $1-v_n>0$

وبالتالي: $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}:\ 1-v_n>0}$

ب- ليكن $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ إذن: $v_n(u_n+1) = u_n-1$ إذن: $v_nu_n - u_n = -1-v_n$

يعني $(1-v_n)u_n = 1+v_n$ وحيث $\forall n\in\mathbb{N}:\ 1-v_n>0$ حسب السؤال 2) أ- إذن: $\boxed{u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}}$

3) أ- لدينا: $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \dfrac{\frac{4u_n+3}{3u_n+4}-1}{\frac{4u_n+3}{3u_n+4}+1} = \dfrac{u_n-1}{+u_n+7} = \dfrac{1}{7}\times\dfrac{u_n-1}{u_n+1} = \dfrac{1}{7}v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$.

إذن: $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+1} = \dfrac{3-1}{3+1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad v_n = v_0\times q^n = \boxed{\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{7}\right)^n = \dfrac{1}{2\times 7^n}}$.

ب- بما أن $-1 < \frac{1}{7} < 1$ فإن $\lim\limits_{+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$ أي أن $\boxed{\lim\limits_{+\infty} v_n = 0}$

وبما أن: $\lim\limits_{+\infty} u_n = \lim\limits_{+\infty}\dfrac{1+v_n}{1-v_n} = \dfrac{1+0}{1-0} = 1$ فإن: $\boxed{\lim\limits_{+\infty} u_n = 1}$

Math-Hor
mathématiques secondaires

تصحيح الامتحان الوطني الرياضيات
الدورة الاستدراكية 2012 (22)

ذ: الجسر

التمرين الرابع:

1) ليكن A الحدث: الحصول على ثلاث كرات حمراء. إذن: $p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}$ حيث:

$card A = C_5^3 = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = \boxed{10}$

و $card\,\Omega = C_{12}^3 = \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = \boxed{220}$

إذن: $P(A)=\frac{10}{220}=\boxed{\frac{1}{22}}$

2) ليكن B الحدث: الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون. إذن:

$card B = C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = 10+4+1 = 15$

إذن: $p(B)=\frac{card B}{card\,\Omega}=\frac{15}{220}=\boxed{\frac{3}{44}}$

3) ليكن C الحدث: الحصول على كرة حمراء على الأقل. إذن: (RRR أو RRB أو RBR)

$card C = C_5^1\times C_7^2 + C_5^2\times C_7^1 + C_5^3$
$= 5\times21+10\times7+10 = 185$

إذن: $p(C)=\frac{card C}{card\,\Omega}=\frac{185}{220}=\boxed{\frac{37}{44}}$

التمرين الخامس

1) ليكن x من $\mathbb{R}$ لدينا: $D_f=\mathbb{R}$ إذن:

$f(-x) = -x+\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = -x+\frac{\cancel{e^{-x}}(1-e^{x})}{\cancel{e^{-x}}(1+e^{x})} = -x-\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1} = -f(x)$

إذن الدالة f فردية بمعنى أن O مركز تماثل المنحنى (C).

2) ليكن $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $x+1-\frac{2}{e^x+1} = x+\frac{e^x+1-2}{e^x+1} = x+\frac{e^x-1}{e^x+1} = f(x)$

إذن:

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}:\quad f(x)=x+1-\frac{2}{e^x+1}}$$

3) أ- حسب السؤال 2 لدينا: لكل $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=x+1-\frac{2}{e^x+1}$

إذن: $\left(\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}\right)$

إذن: $\left((e^x)'=e^x\right)$

$f'(x)=1+\frac{2(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$

$f'(x)=1+\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

لدينا $f(0)=1+\frac{2e^0}{(e^0+1)^2}=1+\frac{2}{4}=\frac{3}{2}$

ب- لدينا: لكل $x\in\mathbb{R}$: $e^x>0$ و $(e^x+1)^2>0$ إذن: $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0$ أي $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)>0$

إذن: $\boxed{f \text{ تزايدية على } \mathbb{R}}$.

ج- لدينا: $\boxed{(T):\ y=f'(0)(x-0)+f(0)}$

وحيث: $f(0)=0$ و $f'(0)=\frac{3}{2}$ إذن: $\boxed{(T):\ y=\frac{3}{2}x}$

4) أ- لدينا: $\lim_{+\infty} e^x=+\infty$ إذن: $\lim_{+\infty}\frac{2}{e^x+1}=0$ ولدينا $\lim_{+\infty} x+1=+\infty$

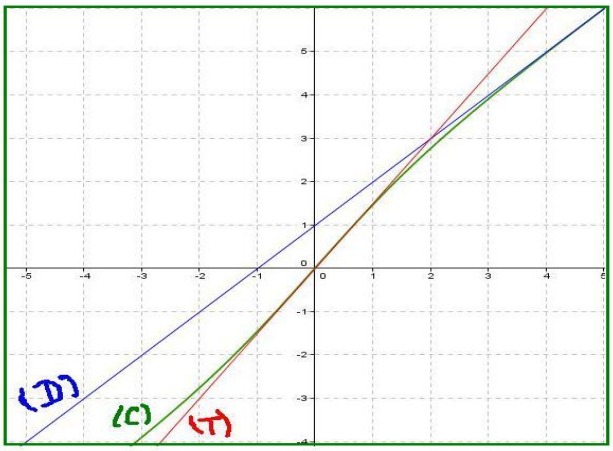
وبما أن: $f(x)=x+1-\frac{2}{e^x+1}$ إذن: $\lim_{+\infty} f(x)=\lim_{+\infty}\left(x+1-\frac{2}{e^x+1}\right)=\boxed{+\infty}$

ب- لدينا: $\lim_{+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{+\infty}\frac{-2}{e^x+1}=0$ إذن: $\boxed{(D):\ y=x+1 \text{ مقارب لـ } (C) \text{ بجوار } +\infty}$

ج- لدينا: $f(x)-(x+1)=-\frac{2}{e^x+1}<0$ لأن: $e^x+1>0$ و $-2<0$ إذن:

$\boxed{(C) \text{ يوجد تحت المستقيم } (D)}$

5) لإنشاء (D) و (T) و (C) أنظر الشكل



6) أ- لدينا: $H(x)=x-\ln(e^x+1)$ إذن: $H'(x)=1-\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}$

$=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$

إذن: $H: x\mapsto x-\ln(e^x+1)$ دالة أصلية لـ $x\mapsto\frac{1}{e^x+1}$ على $\mathbb{R}$.

ب- لدينا:

$$\int_0^{\ln2}\frac{1}{e^x+1}dx=\left[x-\ln(e^x+1)\right]_0^{\ln2}=(\ln2-\ln(3))-(0-\ln1)$$
$$=\boxed{\ln4-\ln3}$$

ج-

$$A=\int_0^{\ln2}|f(x)-(x+1)|\,dx\times1cm^2$$

لأن (C) يوجد تحت (D)

$$=\int_0^{\ln2}\cancel{(x+1)}-\cancel{(x+1)}+\frac{2}{e^x+1}\,dx\times1cm^2$$

$$=\int_0^{\ln2}\frac{2}{e^x+1}dx\times1cm^2=\boxed{2(\ln4-\ln3)\,cm^2}$$

مع تحيات ذ: الجسر Math-Hor