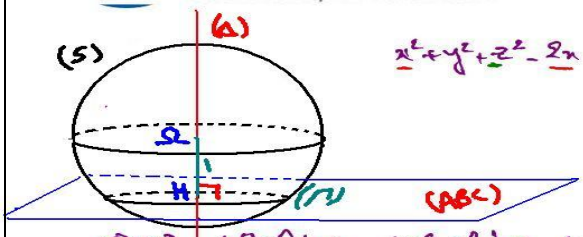
Math-Hor
mathématiques secondaires

تصحيح الامتحان الوطني الرياضيات
الدورة العادية 2012

ذ: الحسن

التمرين الأول:



1) لدينا: $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2+z^2-2z-1=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1-1+y^2+z^2-2z+1-1-1=0$

$\Leftrightarrow \boxed{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=3=(\sqrt{3})^2}$

إذن (S) فلكة مركزها $\Omega(1,0,1)$ وشعاعها $\sqrt{3}$.

2) أ- لدينا: $\vec{AB}(-1,0,-1)$ و $\vec{AC}(2,1,2)$ إذن:

$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix}0&-1\\1&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&-1\\2&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&0\\2&1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}-0\vec{j}-\vec{k}=\boxed{\vec{i}-\vec{k}}$

المستوى (ABC) متجهته المنظمية هي $\vec{AB}\wedge\vec{AC}(1,0,-1)$ إذن معادلتها الديكارتية تكتب على الشكل: $1.x+0y-1z+d=0$

أي: $x-z+d=0$ وحيث $A\in(ABC)$ إذن: $1-(-1)+d=0$ أي $d=-2$ ومنه

$\boxed{x-z-2=0}$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

ب- لدينا: $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\boxed{\sqrt{2}}$

بما أن $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{2}<R=\sqrt{3}$ فإن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S)

وفق دائرة (Γ) شعاعها $\boxed{r=1}$ لأن: $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{3-2}=\sqrt{1}=1$

3) أ- لدينا: (Δ) موجه بالمتجهة $\vec{AB}\wedge\vec{AC}(1,0,-1)$ (لأن (Δ) عمودي على (ABC)) ويمر من $\Omega(1,0,1)$ إذن:

تمثيله البارامتري هو:

$$\boxed{(\Delta):\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}}$$

ب- لتكن $H(x,y,z)$ نقطة تقاطع (Δ) والمستوى (ABC) إذن احداثيات H تحقق ما يلي:

$$\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\end{cases}\ (1) \quad \text{و} \quad x-z-2=0\ (2)$$

نعوض (1) في (2) فنجد: $(1+t)-(1-t)-2=0$ أي $1+t-1+t-2=0$ أي $2t=2$ أي $t=1$

ونعوض قيمة $t=1$ في (1) فنجد: $H:\begin{cases}x=1+1=2\\y=0\\z=1-1=0\end{cases}$ ومنه $\boxed{H(2,0,0)}$

2- مركز الدائرة (Γ) هي النقطة $H(2,0,0)$.

التمرين الثاني:

1) لدينا: $\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\times1\times61=144-244=-100=\boxed{(10i)^2}$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين:

$z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{12+10i}{2}=6+5i$ و $z_2=6-5i$

وبالتالي: $\boxed{S=\{6+5i\ ;\ 6-5i\}}$

2) أ- لدينا: $\dfrac{a-c}{b-c}=\dfrac{6-5i-2-i}{4-2i-2-i}=\dfrac{4-6i}{2-3i}=\dfrac{2(2-3i)}{2-3i}=\boxed{2\in\mathbb{R}}$

إذن النقط A و B و C مستقيمية

ب- لدينا D صورة C بالإزاحة T إذن: $d=c+1+5i=2+i+1+5i=3+6i$

2- لدينا: $\dfrac{d-c}{b-c}=\dfrac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i}=\dfrac{1+5i}{2-3i}=\dfrac{(1+5i)(2+3i)}{2^2+3^2}=\dfrac{2+3i+10i-15}{13}=\dfrac{-13+13i}{13}=-1+i$

لدينا: $-1+i=\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$

إذن: $\dfrac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $-1+i$

3- لدينا: $\overline{(\vec{CB},\vec{CD})}\equiv\arg\left(\dfrac{d-c}{b-c}\right)[2\pi]\equiv\arg(-1+i)[2\pi]\equiv\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$

إذن: $\boxed{(\vec{CB},\vec{CD})\equiv\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]}$

التمرين الثالث:

1) ليكن Ω كون الامكانيات: لدينا السحب عبارة عن تأليفة لثلاث عناصر من بين 8 عناصر إذن: $\text{card}\,\Omega=C_8^3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=\boxed{56}$

لدينا الحدث A على ثلاث بيدقات تحمل أعداد مختلفة مثنى مثنى أي: (2 و 1 و 0) إذن:

$\text{card}\,A=C_1^1\times C_5^1\times C_2^1=1\times5\times2=10$

إذن: $P(A)=\dfrac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\Omega}=\dfrac{10}{56}=\boxed{\dfrac{5}{28}}$

2) لدينا الحدث B: مجموع الأعداد التي تحملها البيدقات المسحوبة يساوي 5. يعني $2+2+1=5$ (الحالة الوحيدة)

إذن: $\text{card}\,B=C_2^2\times C_5^1=1\times5=5$

إذن: $P(B)=\dfrac{\text{card}\,B}{\text{card}\,\Omega}=\boxed{\dfrac{5}{56}}$

3) لدينا الحدث C: مجموع الأعداد التي تحملها البيدقات المسحوبة يساوي 4 يعني

$2+0+2=4$ أو $1+1+2=4$ (حالتان فقط) إذن

$\text{card}\,C=C_2^2\times C_1^1+C_5^2\times C_2^1=1\times1+10\times2=1+20=21$

إذن: $P(C)=\dfrac{\text{card}\,C}{\text{card}\,\Omega}=\dfrac{21}{56}=\boxed{\dfrac{3}{8}}$

مع تحيات ذ: الحسن Math Hor

Math-Hor
mathématiques secondaires

تصحيح الامتحان الوطني للرياضيات
الدورة العادية 2012

ذ: الحسن

التمرين الرابع:

1) ليكن $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $u_{n+1}-12=\frac{10}{11}u_n+\frac{12}{11}-12=\frac{10}{11}u_n+\frac{12-132}{11}=\frac{10}{11}u_n-\frac{120}{11}=\frac{10}{11}(u_n-12)$
$=\frac{10}{11}(u_n-12)$

إذن: $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}:\ u_{n+1}-12=\frac{10}{11}(u_n-12)}$

2) أ- من أجل $n=0$ لدينا: $u_0=11<12$ إذن العبارة صحيحة من أجل $n=0$.

نفترض أن العبارة صحيحة من أجل n أي $u_n<12$ ونبين أن العبارة صحيحة من أجل $n+1$ أي نبين أن: $u_{n+1}<12$

وحسب الافتراض لدينا $u_n<12$ أي $u_n-12<0$

وحسب السؤال 1) لدينا: $u_{n+1}-12=\frac{10}{11}(u_n-12)<0$ إذن: $u_{n+1}-12<0$ أي $u_{n+1}<12$

إذن: $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}:\ u_n<12}$

ب- ليكن $n\in\mathbb{N}$: لنبين أن: $u_n<u_{n+1}$ ؟ لدينا $u_{n+1}-u_n=\frac{10}{11}u_n+\frac{12}{11}-u_n=-\frac{1}{11}u_n+\frac{12}{11}=\frac{12-u_n}{11}>0$

لأن حسب السؤال 2) أ- $u_n<12$ أي $12-u_n>0$ ومنه $u_{n+1}-u_n>0$ أي $u_{n+1}>u_n$

إذن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا

ج- بما أن المتتالية (u_n) مكبورة بالعدد 12 وتزايدية فهي $\boxed{\text{متقاربة}}$.

3) أ- لدينا: حسب السؤال 1): ليكن $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}=u_{n+1}-12=\frac{10}{11}(u_n-12)=\frac{10}{11}v_n$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{\frac{10}{11}}$ وحدها الأول $\boxed{v_0=-1}$ لأن $(v_0=u_0-12=11-12=-1)$

إذن: $\boxed{v_n=-\left(\frac{10}{11}\right)^n}$ إذن: $\boxed{v_n=v_0\times q^n}=-1\times\left(\frac{10}{11}\right)^n=-\left(\frac{10}{11}\right)^n$

ب- ليكن $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $v_n=u_n-12$ أي أن: $u_n=v_n+12$ إذن: $u_n=12-\left(\frac{10}{11}\right)^n$

بما أن $\boxed{-1<\frac{10}{11}<1}$ فإن $\boxed{\lim_{+\infty}\left(\frac{10}{11}\right)^n=0}$ ومنه $\boxed{\lim_{+\infty}u_n=12}$.

التمرين الخامس

(I) 1) ليكن $x\in]0,1[$ لدينا: $0<x<1$ أي ⓐ $x^2-1<0$ و $\ln(x)<0$ أي ⓑ $2x^2\ln(x)<0$ إذن: x^2-1 و $2x^2\ln(x)$ لهما نفس الإشارة على $]0,1[$

بجمع المتفاوتتين ⓐ و ⓑ طرفا بطرف نجد: $g(x)=x^2-1+2x^2\ln(x)<0$ على $]0,1[$

وبما أن $g(1)=1^2-1-2\times1^2\ln(1)=0$ إذن: $\boxed{\forall x\in]0,1]:\ g(x)\leq0}$

2) ليكن $x\in]1,+\infty[$ لدينا: $x>1$ أي ⓒ $x^2-1>0$ و ⓓ $\ln(x)>0$ أي $2x^2\ln(x)>0$ إذن: x^2-1 و $2x^2\ln(x)$ لهما نفس الإشارة على $]1,+\infty[$

بجمع ⓒ و ⓓ نجد: $g(x)=x^2-1+2x^2\ln(x)>0$ على $]1,+\infty[$

وبما أن $g(1)=0$ إذن: $\boxed{\forall x\in[1,+\infty[:\ g(x)\geq0}$

(II) 1) أ- لدينا: $\lim_{0^+}f(x)=\lim_{0^+}(x^2-1)\ln(x)=\lim_{0^+}\underbrace{x^2\ln(x)}_{\to0}-\underbrace{\ln(x)}_{\to-\infty}=\boxed{+\infty}$

إذن (C) يقبل مقارب عمودي معادلته $x=0$

ب- لدينا: $\lim_{+\infty}f(x)=\lim_{+\infty}\underbrace{(x^2-1)}_{\to+\infty}\underbrace{\ln(x)}_{\to+\infty}=\boxed{+\infty}$

و $\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{+\infty}\underbrace{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)}_{\to+\infty}\underbrace{\ln(x)}_{\to+\infty}=\boxed{+\infty}$ $\left(\lim_{+\infty}\frac{x^2-1}{x}=\lim_{+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{+\infty}x=+\infty\right)$

إذن (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه محور الأراتيب

2) أ- ليكن $x>0$ لدينا: $f'(x)=\left((x^2-1)\ln(x)\right)'=(x^2-1)'\ln(x)+(x^2-1)\ln'(x)$
$=2x\ln(x)+(x^2-1)\times\frac{1}{x}=\frac{2x^2\ln(x)+x^2-1}{x}=\frac{g(x)}{x}$

إذن: $\forall x\in]0,+\infty[:\ \boxed{f'(x)=\frac{g(x)}{x}}$

ولدينا: $f'(1)=\frac{g(1)}{1}=\boxed{0}$ (حسب الجزء I) إذن (C) يقبل مماس أفقي في النقطة $(1,0)$.

ب- حسب السؤالين 1) و 2) من الجزء I لدينا:
$\forall x\in]0,1]:\ f'(x)=\frac{g(x)}{x}\leq0$
$\forall x\in[1,+\infty[:\ f'(x)=\frac{g(x)}{x}\geq0$

إذن f تناقصية على $]0,1]$ وتزايدية على $[1,+\infty[$.

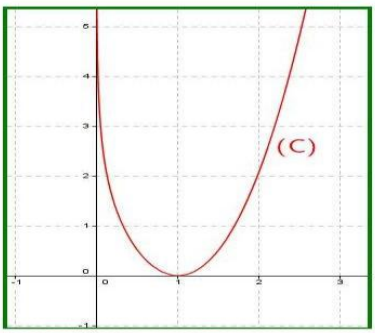
ج- جدول تغيرات f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

من خلال الجدول نلاحظ أن f تقبل قيمة دنيا 0 عند 1

إذن: $\boxed{\forall x\in]0,+\infty[:\ f(x)\geq0}$

3) أنظر الشكل جانبه



4) أ- لدينا: $u'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)'=\frac{3x^2}{3}-1=x^2-1$

إذن $u:x\mapsto\frac{x^3}{3}-x$ دالة أصلية لـ $x\mapsto x^2-1$ على $\mathbb{R}$.

ب- لدينا:
$$\underbrace{\int_1^2(x^2-1)\ln(x)\,dx}_{u'\times v}=\underbrace{\left[\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\ln(x)\right]_1^2}_{u\times v}-\underbrace{\int_1^2\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\times\frac{1}{x}\,dx}_{u\times v'}$$
$$=\left(\frac{8}{3}-2\right)\ln(2)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\ln(1)-\int_1^2\left(\frac{x^2}{3}-1\right)dx$$
$$=\frac{2}{3}\ln(2)-\left[\frac{x^3}{9}-x\right]_1^2=\frac{2}{3}\ln(2)-\left(\frac{8}{9}-2\right)+\left(\frac{1}{9}-1\right)$$
$$=\frac{2}{3}\ln(2)+\frac{10}{9}-\frac{8}{9}=\frac{2}{3}\ln(2)+\frac{2}{9}=\boxed{\frac{2}{9}(1+3\ln(2))}$$

ج- انتباه: في بداية الجزء II تمت الإشارة إلى الوحدة $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=3cm$

إذن $\mathcal{A}=\left(\int_1^2|f(x)-0|\,dx\right)\times9cm^2=\left(\int_1^2f(x)\,dx\right)\times9cm^2=\left(\int_1^2(x^2-1)\ln(x)\,dx\right)9cm^2=2(1+3\ln(2))cm^2$

محور الأفاصيل $y=0$ $\quad(\forall x>0:\ f(x)\geq0$ لأن$)$

إذن: $\boxed{\mathcal{A}=2(1+3\ln(2))cm^2}$

مع تحيات ذ: الحسن

Math-Hor