تصحيح الامتحان الوطني الاستدراكي 2011

التمرين 1 :

1) أ- نعتبر S مجموعة حلول المعادلة: $x^2-2x-3=0$. لنحسب Δ : لدينا $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-3)=4+12=16>0$

إذن المعادلة تقبل حلين هما: $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+4}{2}=3$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-4}{2}=-1$ و بالتالي: $\boxed{S=\{-1,3\}}$

ب- لتكن S مجموعة حلول المعادلة: $e^x-\frac{3}{e^x}-2=0$ نضع $X=e^x$ المعادلة تكافئ $X-\frac{3}{X}-2=0$ أي $\frac{X^2-3-2X}{X}=0$

وحسب السؤال أ) لدينا $X_1=3$ و $X_2=-1$ وبما أن $X>0$ $(X=e^x)$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا هو $X=3$ أي $e^x=3$

أي $x=\ln 3$ ، وبالتالي $\boxed{S=\{\ln 3\}}$

2) لتكن S مجموعة حلول المتراجحة $e^{x+1}-e^{-x}\geq0$ لدينا:

$e^{x+1}\geq e^{-x} \Leftrightarrow x+1\geq -x \Leftrightarrow 2x\geq -1 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$

و بالتالي: $\boxed{S=[-\frac{1}{2},+\infty[}$

التمرين 2 :

1) نعتبر S مجموعة حلول المعادلة: $z^2-6z+18=0$ لدينا: $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times18=36-72=-36<0$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين هما: $z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{6+6i}{2}=3+3i$ و $z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{6-6i}{2}=3-3i$

وبالتالي $S=\{3+3i\,;\,3-3i\}$

2) أ- لدينا: $a=3+3i$ إذن: $|a|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ إذن: $a=3\sqrt{2}\left(\frac{3+3i}{3\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=[3\sqrt{2},\frac{\pi}{4}]$

وبما أن $b=\overline{a}$ فإن: $b=[3\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}]$

ب- لدينا التمثيل العقدي للإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ هي: $z'=z+z_{\overrightarrow{OA}}$ ، لدينا $\overrightarrow{OA}(3+3i)$

إذن: $z'=z+3+3i$ وبما أن: $B(b)$ صورة $B'(b')$ بإزاحة إذن: $b'=b+3+3i=3-3i+3+3i=6$

ج) لدينا:

$$\frac{b-b'}{a-b'}=\frac{3-3i-6}{3+3i-6}=\frac{-3-3i}{-3+3i}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{1+1}=\frac{2i}{2}=i$$

وبما أن $\frac{b-b'}{a-b'}=i=[1,\frac{\pi}{2}]$ إذن: $|b-b'|=|a-b'|$ أي $BB'=AB'$ (1)

و $\arg\left(\frac{b-b'}{a-b'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ أي $(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{B'B})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $AB'B$ مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في B'.

د) لدينا B' صورة B بإزاحة $\overrightarrow{OA}$ أي $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{OA}$ أي $OAB'B$ متوازي أضلاع.

وبما أن $AB'B$ متساوي الساقين في B' فإن $OAB'B$ معين

وبما أن $AB'B$ قائم الزاوية في B' فإن $OAB'B$ مربع.

التمرين 3 :

1) أ- لدينا: لكل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{6u_n}{1+15u_n}\Leftrightarrow u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{6u_n}{1+15u_n}-\frac{1}{3}=\frac{18u_n-1-15u_n}{3(1+15u_n)}=\frac{3u_n-1}{3(1+15u_n)}$

إذن: $\boxed{u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{u_n-\frac{1}{3}}{1+15u_n}}$ لكل $n\in\mathbb{N}$.

ب- من أجل $n=0$ لدينا: $u_0=1>\frac{1}{3}$ إذن العبارة صحيحة من أجل $n=0$.

نفترض أن: $u_n>\frac{1}{3}$ ونبين أن: $u_{n+1}>\frac{1}{3}$

وحسب السؤال أ) لدينا $u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{u_n-\frac{1}{3}}{1+15u_n}>0$ (لأن $u_n-\frac{1}{3}>0$) إذن $u_{n+1}-\frac{1}{3}>0$ أي $u_{n+1}>\frac{1}{3}$

وبالتالي: $\boxed{u_n>\frac{1}{3}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

2) لدينا:

$$v_{n+1}=1-\frac{1}{3u_{n+1}}=1-\frac{1}{3\cdot\frac{6u_n}{1+15u_n}}=1-\frac{1+15u_n}{18u_n}=1-\frac{1}{18u_n}-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}-\frac{1}{18u_n}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3u_n}\right)=\frac{1}{6}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$.

ولدينا $v_0=1-\frac{1}{3u_0}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ إذن: $\boxed{v_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

3) لدينا: $v_n=1-\frac{1}{3u_n}\Leftrightarrow\frac{1}{3u_n}=1-v_n\Leftrightarrow u_n=\frac{1}{3(1-v_n)}=\frac{1}{3\left(1-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)}=\frac{1}{3-2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

بما أن: $-1<\frac{1}{6}<1$ إذن $\lim_{+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n=0$ ومنه $\lim_{+\infty}u_n=\frac{1}{3-2\times0}=\boxed{\frac{1}{3}}$

التمرين الرابع:

I) 1) أ- لدينا: $g(x)=x-1+\ln x$ ، إذن: لكل $x\in]0,+\infty[$ ، $g'(x)=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$

ب- بما أن: $x>0$ و $x+1>0$ فإن $g'(x)>0$ إذن: g تزايدية على $I=]0,+\infty[$

2) جدول تغيرات g: لدينا: $g(1)=1-1+\ln 1=0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖		$+$		
$g(x)$	‖	↗	0	↗	

من خلال جدول تغيرات g لدينا:

$g(x)\geq 0$ لكل $x\in[1,+\infty[$

و $g(x)\leq 0$ لكل $x\in]0,1]$

II) 1) أ- لدينا:

$$\lim_{0^+} f(x)=\lim_{0^+}\underbrace{\left(\frac{x-1}{x}\right)}_{\to -\infty}\underbrace{\ln(x)}_{\to -\infty}=\boxed{+\infty}$$

إذن (C_f) يقبل مقارب عمودي معادلته $x=0$.

ب- لدينا:

$$\lim_{+\infty} f(x)=\lim_{+\infty}\underbrace{\left(\frac{x-1}{x}\right)}_{\to 1}\underbrace{\ln(x)}_{\to +\infty}=\boxed{+\infty}$$

و

$$\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{+\infty}\underbrace{\left(\frac{x-1}{x}\right)}_{\to 1}\underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0}=\boxed{0}$$

ج- لدينا $\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ إذن (C_f) يقبل فرع شلجمي في جوار $+\infty$ اتجاهه محور الأفاصيل

2) أ- ليكن x من $]0,+\infty[$ لدينا: $f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln(x)$

إذن:

$$f'(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)'\ln(x)+\left(\frac{x-1}{x}\right)(\ln(x))'$$

$$=\frac{1\times 0-1\times(-1)}{x^2}\ln(x)+\frac{x-1}{x}\times\frac{1}{x}=\frac{\ln(x)}{x^2}+\frac{x-1}{x^2}$$

$$=\frac{\ln(x)+x-1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

إذن $\boxed{f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}}$

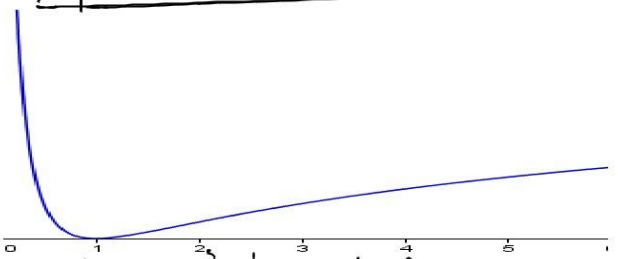
ب- حسب السؤال I) 2) لدينا: $g(x)\geq 0$ على $[1,+\infty[$ إذن $f'(x)\geq 0$ أي f تزايدية على $[1,+\infty[$

و $g(x)\leq 0$ على $]0,1]$ إذن $f'(x)\leq 0$ أي f تناقصية على $]0,1]$

ج- جدول التغيرات f:

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3)



4) أ- لدينا: $H(x)=\frac{1}{2}\ln^2(x)$ إذن: $H'(x)=\frac{2}{2}\ln'(x)\ln(x)$ أي $H'(x)=\frac{1}{x}\ln(x)$ إذن: $H'(x)=h(x)$

إذن H دالة أصلية لـ h على I .

ب- لدينا:

$$\int_1^e\frac{\ln(x)}{x}dx=\left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^e=\frac{1}{2}\left(\ln^2(e)-\ln^2(1)\right)=\boxed{\frac{1}{2}}$$

ج- نضع: $\begin{cases}u(x)=\ln(x)\\ v'(x)=1\end{cases}$ إذن $\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x}\\ v(x)=x\end{cases}$ ومنه:

$$\int_1^e\ln(x)dx=[x\ln(x)]_1^e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}dx=e\ln(e)-1\times\ln(1)-[x]_1^e=e-(e-1)=1$$

إذن $\int_1^e\ln(x)dx=1$

5) أ- لدينا: لكل $x\in I$: $f(x)=\frac{x-1}{x}\ln(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x)=\ln(x)-\frac{\ln(x)}{x}$

إذن: $\boxed{f(x)=\ln(x)-\frac{\ln(x)}{x}}$

ب- لتكن A مساحة الحيز لدينا:

$$A=\left(\int_1^e f(x)dx\right)\times 1cm\times 1cm=\left(\int_1^e\ln(x)dx-\int_1^e\frac{\ln(x)}{x}dx\right)\times 1cm^2$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)cm^2=\frac{1}{2}cm^2=\boxed{0,5\,cm^2}$$

End.

مع تحيات الأستاذ

Math-Hor.