# I – Généralités sur les suites

**<u>Définition :</u>** Une suite u de nombres réels est une fonction dont la variable est un entier naturel. L'image par u d'un entier n est notée $u_n$ et se lit « u indice n ».

**<u>Notation et remarques :</u>** La suite u est souvent notée $(u_n)$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ . Le terme $u_n$ appelé terme de rang n, n'est pas toujours le n-ième terme cela dépend de l'indice du premier terme

**<u>Propriétés :</u> (Modes de génération)** Une suite peut être définie :
- *par une formule explicite* : $u_n = f(n)$ où $f$ est une fonction de la variable n.
- *par une relation de récurrence* : $(u_n)$ est alors définie par son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents. La relation peut être donnée par une formule explicite ou par un algorithme.
- *par un autre moyen*, exemple la suite des décimales de π.

**<u>Exemples :</u>** Pour chaque mode de génération, donner un exemple (retour sur le devoir maison) :
- *par une formule explicite* : la suite des entiers naturels / pairs / impairs .
- *par une relation de récurrence* : la suite de Fibonacci : $u_0 ; u_1 et u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
- *par un autre moyen* : la suite des décimales de π.

### *Représentation graphique d'une suite*

Pour représenter graphiquement une suite, on place les points de coordonnées $A_n(n ; u_n)$ dans un repère (O, I, J) du plan.

**<u>Exemples :</u>** Représentez les premiers termes des suites $u_n$ , $v_n$ et $w_n$ définies par :
(une formule explicite) $u_n = ¿$
(une relation de récurrence) $v_n = ¿$
(une relation de récurrence) $w_n = ¿$

## II - Sens de variations d'une suite

**Définitions :** Considérons la suite $u=(u_n)$ .
La suite u est croissante si, pour tout n, $u_n \le u_{n+1}$ .
La suite u est décroissante si, pour tout n, $u_n \ge u_{n+1}$ .
La suite u est constante si, pour tout n, $u_n = u_{n+1}$ .
La suite est monotone si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante.

**Méthodes pour déterminer les variations d'une suite : On calcule $u_{n+1}-u_n$ !**
1ère méthode : $u_n \le u_{n+1}$ est équivalent à $u_{n+1}-u_n \ge 0$ c'est équivalent aussi à $u_n - u_{n+1} \le 0$ .

autre méthode possible : (Avec plus de contraintes, il faut connaître le signe des termes de la suite!)
Si pour tout n entier naturel $u_n \ge 0$ alors $u_n \le u_{n+1}$ est équivalent à $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$ (ou encore $\frac{u_n}{u_{n+1}} \le 1$ ).

**Exercices :** étudier les variations des suites dont les termes généraux sont les suivants.

$$u_n = \frac{1}{n+2} \quad ; \quad v_0 = 1 \,;\, v_{n+1} = v_n + n + 1 \quad ; \quad w_0 = 1 \,;\, w_{n+1} = w_n + n - 7$$

| Méthodes | $(u_n)$ | $(v_n)$ | $(w_n)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)+2} - \frac{1}{n+2}$<br>$u_{n+1}-u_n = \frac{(n+2)-(n+3)}{(n+3)(n+2)}$<br>$u_{n+1}-u_n = \frac{-1}{(n+3)(n+2)}$<br>$u_{n+1}-u_n < 0$<br>$car\,(n+3)>0\,et\,(n+2)>0$ | $v_{n+1}-v_n = n+1$<br>avec n $\in \mathbb{N}$<br>$v_{n+1}-v_n > 0$ | $w_{n+1}-w_n = n-7$<br>avec n $\in \mathbb{N}$<br>$w_{n+1}-w_n \ge 0\; pour\, n \ge 7$ |
| 2 | $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+3}}{\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+3}$<br>$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+3)-1}{n+3}$<br>$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+3}{n+3} - \frac{1}{n+3}$<br>$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n+3} < 1$ | $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n+n+1}{v_n}$<br>$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + \frac{n+1}{v_n}$<br>Pour poursuivre, il faut pouvoir comparer $v_n$ et $n+1$ .<br>(Pas de réponse avec cette méthode !) | $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{w_n+n-7}{w_n}$<br>$\frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 + \frac{n-7}{w_n}$<br>Pour poursuivre, il faut pouvoir comparer $w_n$ et $n-7$ .<br>(Pas de réponse avec cette méthode !) |
| Conclus° | Pour n $\in \mathbb{N}$, on a :<br>$u_{n+1} < u_n$<br>La suite $(u_n)$ est strictement décroissante. | Pour n $\in \mathbb{N}$, on a :<br>$v_{n+1} > v_n$<br>La suite $(v_n)$ est strictement croissante. | Pour n $\in \mathbb{N}$, $n \ge 7$ , on a :<br>$w_{n+1} \ge w_n$<br>La suite $(w_n)$ est croissante. |

**Propriété :** Si $f$ est une fonction croissante sur ]0;+∞[ et $u_n = f(n)$
alors $u_n$ est une suite croissante.
*Remarque :* On a une propriété analogue lorsque la fonction est décroissante, ou constante.

**Exemples :** Étudiez les variations des suites u et v respectivement définies par les termes généraux suivants : $u_n = 3\text{n}^2 - 4$ et $v_n = \dfrac{5+n}{n}$ .

Pour la suite u, on s'intéresse à la fonction $f : x \rightarrow 3x^2 - 4$ .
f est dérivable sur ℝ et $f'(x) = 3(2\text{x}) + 0 = 6x$ .
On étudie le signe de la dérivée pour en déduire les variations de la fonction f.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $-4$ | ↗ | |

La fonction f est strictement croissante sur [0;+∞[, donc la suite $(u_n)$ est strictement croissante.

Pour la suite v, on s'intéresse à la fonction $g : x \rightarrow \dfrac{5+x}{x}$ .
g est dérivable sur ]0;+∞ [ et $g'(x) = \dfrac{1 \times x - (5+x) \times 1}{(x)^2} = \dfrac{x - 5 - x}{x^2} = -\dfrac{5}{x^2}$
On étudie le signe de la dérivée pour en déduire les variations de la fonction g.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | ‖ | ↘ | |

La fonction g est strictement décroissante sur ]0 ;+∞[, donc la suite $(v_n)$ est strictement décroissante.

## III – Suites arithmétiques

**Définition :** Une suite (u_n) est dite **arithmétique** lorsque chaque terme se déduit du précédent en ajoutant une constante r, appelée la **raison.**
Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=u_n+r$ .

**Exemples :**
La suite arithmétique de premier terme -10 et de raison 7 a pour premiers termes :
-10 -3 4 11 18 25 32 …
La suite arithmétique de premier terme 2014 et de raison 1 a pour premiers termes :
2014 2015 2016 2017 2018 2019 2020 …

**Propriété :**
Le terme général d'une suite arithmétique u de premier terme $u_0$ et de raison r est : $u_n=u_0+nr$ .
**Exemple :** Si $(u_n)$ est la suite arithmétique de raison 7 et de premier terme $u_0=-10$ , alors pour tout entier naturel n, $u_n=-10+7\text{n}$ .

**Propriétés :**
(1) Soit $(u_n)$ une suite. S'il existe deux réels a et b, tels que pour tout entier naturel n, $u_n=an+b$ , alors la suite $(u_n)$ est arithmétique de raison a et de premier terme b.
(2) Les points $A_n(n\,;u_n)$ sont alignés si, et seulement si, la suite $(u_n)$ est arithmétique.
(3) Pour une suite arithmétique $(u_n)$ , la variation absolue $u_{n+1}-u_n$ est constante.

## IV – Suites géométriques

**Définition :** Une suite $(u_n)$ est dite **géométrique** lorsque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par une constante q, appelée la **raison.**
Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=q\times u_n$ .

**Exemples :**
La suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3 a pour premiers termes :
1 3 9 27 81 243 729 …
La suite géométrique de premier terme 7 et de raison $\frac{1}{2}$ a pour premiers termes :
$7 \quad \frac{7}{2} \quad \frac{7}{4} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{7}{16} \quad \frac{7}{32} \quad \frac{7}{64}$ …

**Propriété :**
Le terme général d'une suite géométrique u de premier terme $u_0$ et de raison q est : $u_n=u_0\times q^n$ .
**Exemple :** Si $(u_n)$ est la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0=1$ , alors pour tout entier naturel n, $u_n=1\times 3^n$ .

**Propriétés :**
(1) Soit $(u_n)$ une suite. S'il existe deux réels a et b, (a strictement positif) tels que pour tout entier naturel n, $u_n=b\times a^n$ , alors la suite $(u_n)$ est géométrique de raison a et de premier terme b.
(2) Si $(v_n)$ est une suite géométrique ne s'annulant pas, alors la variation relative $\frac{v_{n+1}-v_n}{v_n}$ est constante. (On dit que l'évolution est exponentielle.)