CORRIGÉ

Mathématiques

Première ES

Exercice 1 : (6 points)

$f : x \to \frac{1}{x} + 5$ $\qquad D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

La fonction f est la somme de deux fonctions u et v définies et dérivables sur D_f.

On pose : $u : x \to \frac{1}{x}$ et on a : $u' : x \to -\frac{1}{x^2}$

$v : x \to 5$ $\qquad v' : x \to 0$

Au final, on obtient : $f'(x) = u'(x) + v'(x) = -\frac{1}{x^2} + 0 = -\frac{1}{x^2}$.

$g : x \to \sqrt{x} \times x^7$ $\qquad D_g =]0;+\infty[$

La fonction g est le produit de deux fonctions u et v définies et dérivables sur D_g.

On pose : $u : x \to \sqrt{x}$ et on a : $u' : x \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v : x \to x^7$ $\qquad v' : x \to 7x^6$

Au final, on obtient : $g'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times x^7 + \sqrt{x} \times 7x^6 = 0{,}5\,x^6\sqrt{x} + 7x^6\sqrt{x} = 7{,}5\,x^6\sqrt{x}$.

$h : x \to \frac{3x-2}{-4x+1}$ $\qquad D_h =]\frac{1}{4};+\infty[$

La fonction h est le quotient de deux fonctions u et v définies et dérivables sur D_h.

On pose : $u : x \to 3x-2$ et on a : $u' : x \to 3$

$v : x \to -4x+1$ $\qquad v' : x \to -4$

Au final, on obtient :

$$h'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)} = \frac{3(-4x+1) - (3x-2) \times (-4)}{(-4x+1)^2} = \frac{-12x + 3 + 12x - 8}{(-4x+1)^2} = \frac{-5}{(-4x+1)^2}.$$

Exercice 2 : (4 points)

1. $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

Le point $A(\frac{1}{2};\frac{1}{8})$ appartient à la courbe car $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$.

2. L'équation de la tangente T à C_f en A est donnée par :

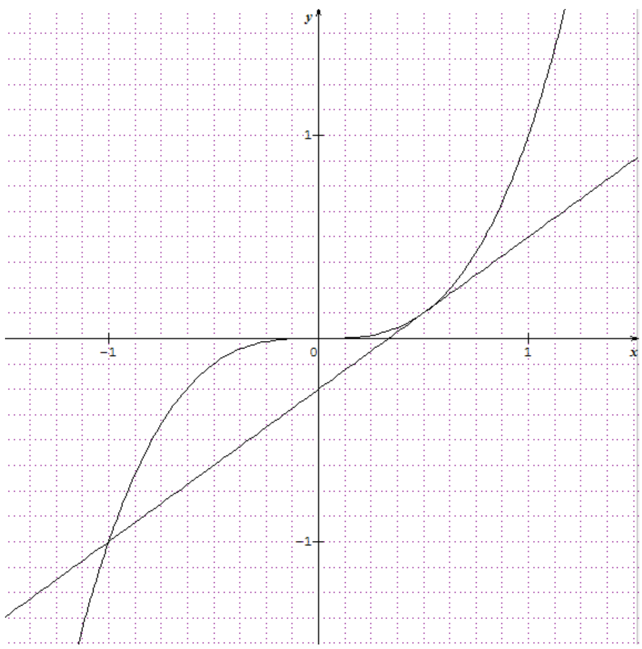
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = \frac{1}{2}$.

On dérive la fonction cube, on trouve $f'(x) = 3x^2$.

$f'(\frac{1}{2}) = 3 \times (\frac{1}{2})^2 = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

$y = \frac{3}{4}(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

3. Le tracé de la tangente (ci-contre).



4. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe est le nombre dérivé de f en $\frac{1}{2}$.

Il est la limite du taux d'accroissement de f en $\frac{1}{2}$.

Exercice 3 : (10 points)
Le coût horaire de production de x appareils est donné en euros par : $C(x)=x^2+50\text{x}+100$, pour $5\leq x\leq 40$.

1) **Étude du bénéfice** (5 points)
a. Le bénéfice horaire pour x appareils est égal au gain dû à la vente de ces x appareils (la recette) auquel on retire le coût de production de ces x appareils. Soit : $B(x)=R(x)-C(x)$.
$B(x)=R(x)-C(x)$ avec $R(x)=100\text{x}$ car « L'entreprise vend chaque appareil 100 euros. »
$B(x)=100\text{x}-(x^2+50\text{x}+100)=-x^2+100\text{x}-50\text{x}-100$

$B(x)=-x^2+50x-100$, pour x appartenant à [5;40].

b. La fonction B est somme de deux fonctions u et v définies et dérivables sur [5;40].
On pose : $u:x\rightarrow -x^2$ et $v:x\rightarrow 50\text{x}-100$
avec : $u':x\rightarrow -2\text{x}$ et $v':x\rightarrow 50$
Donc : $B'(x)=u'(x)+v'(x)=-2\text{x}+50$.

c. étude du signe de B' .
La fonction affine qui à x associe $-2\text{x}+50$ est décroissante car son coefficient directeur vaut -2.
De plus, $-2\text{x}+50=0$ lorsque $-2\text{x}=-50$ soit $x=25$.

x	5		25		40
$B'(x)$		+	0	–	
$B(x)$		↗	525	↘	

d. Il faut produire 25 appareils pour que le bénéfice horaire de l'entreprise soit maximal.

2) **Étude du coût moyen** (5 points)
On désigne par f le coût moyen de production d'un appareil.
a. Le coût moyen f est définie par : $f(x)=\dfrac{C(x)}{x}$, c'est-à-dire : $f(x)=\dfrac{x^2+50\text{x}+100}{x}=x+50+\dfrac{100}{x}$.
b. La fonction f est la somme de deux fonctions u et v définies et dérivables sur [5;40].
Prenons : $u:x\rightarrow x+50$ et $v:x\rightarrow \dfrac{100}{x}$
avec : $u':x\rightarrow 1$ et $v':x\rightarrow -\dfrac{100}{x^2}$
Par somme, on trouve : $f'(x)=1-\dfrac{100}{x^2}$ ou encore : $f'(x)=\dfrac{x^2-100}{x^2}=\dfrac{(x-10)(x+10)}{x^2}$
c. Étude du signe de $f'(x)$ et des variations de f sur [5;40].

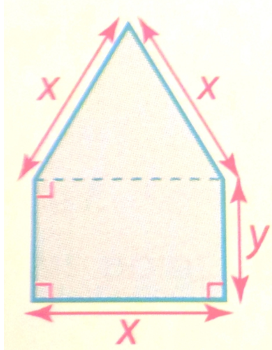
x	5		10		40
$x-10$		–	0	+	
$x+10$		+	⋮	+	
x^2		+	⋮	+	
$f'(x)$		–	0	+	

x	5		10		40
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$		↘	70	↗	

d. Le coût moyen est minimal pour 10 appareils et il vaut 70 € car $f(10)=10+50+\dfrac{100}{10}=70$.

3) Non, d'après ce qui précède le bénéfice n'est pas maximal lorsque le coût moyen est minimal. ($10\neq 25$)

Exercice Bonus : (2 points)
Une fenêtre de périmètre égal à 8 a la forme ci-contre.
On veut déterminer x et y tels que l'aire de la fenêtre soit la plus grande possible.
Exprimez l'aire en fonction de x, puis trouvez x et y qui répondent au problème.



On exprime le périmètre en fonction de x et y : $3x+2y=8$.

De cette relation, on trouve y en fonction de x : $y=\frac{8-3x}{2}=4-\frac{3}{2}x$.

L'aire de la fenêtre est égale à la somme
de l'aire du triangle équilatéral de côté x   Rappel : (BASE x HAUTEUR) / 2
et de l'aire du rectangle de côtés x et y.

$$Aire(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+xy=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+4x-\frac{3}{2}x^2=(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{2})x^2+4x$$

Pour déterminer l'aire maximale, on calcule la dérivée de la fonction Aire.

$$Aire'(x)=(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{2})\times 2x+4=(\frac{\sqrt{3}}{2}-3)x+4$$

$(\frac{\sqrt{3}}{2}-3)<0$ et $(\frac{\sqrt{3}}{2}-3)x+4=0$ lorsque $x=\frac{-4}{(\frac{\sqrt{3}}{2}-3)}=\frac{4}{(3-\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{8}{6-\sqrt{3}}=x_0$

x	0		x_0		$\frac{8}{3}$
$Aire'(x)$		$+$	0	$-$	
$Aire(x)$	0	$\nearrow$	$3{,}7$	$\searrow$	$3{,}08$

alors $y=4-\frac{3}{2}\times\frac{8}{6-\sqrt{3}}=4-\frac{12}{6-\sqrt{3}}$

L'aire est maximale lorsque x et y prennent les valeurs trouvées précédemment,
et vaut environ 3,7 (soit 3,74887 unités d'aires).

Méthologie :
Pour les problèmes (ouverts), on utilise la calculatrice pour :
- tester la situation ;
- tester une ou des valeurs dans un calcul (mode CALC ou TABL) ;
- déterminer les racines, le maximum, le minimum d'une fonction .

C'est seulement dans un second temps, que l'on rédige une démonstration pour apporter notre raisonnement avec toutes les justifications nécessaires.