I – Rappels

1) Expérience aléatoire et probabilité

Définition : Pour décrire une expérience aléatoire :

- on définit l'univers $\Omega = \{ e_1 ; e_2 ; ... ; e_n \}$ constitué de toutes les issues possibles ;
- on associe à chaque issue sa probabilité P(e_i) tel que :
  $P(e_i) \geq 0$ et $P(e_1)+P(e_2)+...+P(e_n)=1$

Exemple : On lance un dé tétraédrique (à 4 faces) équilibré et on observe le numéro obtenu.

Ici : $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 \}$

Les faces (1), (2), (3) et (4) ont la même probabilité d'apparition.

On appelle p = P(1) = P(2) = P(3) = P(4)

Or P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 1

cela revient à : 4p = 1

c'est-à-dire : $p=\frac{1}{4}$.

On en déduit la loi de probabilité sur Ω représentée dans le tableau ci-contre.

e_i	1	2	3	4
$P(e_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Loi de probabilité sur Ω

Exemple : On lance un dé cubique pipé (truqué) et on observe le numéro obtenu :

- Les faces (2), (3), (4) et (5) ont la même probabilité d'apparition ;
- La face (6) a une probabilité double de celle de la face (3) ;
- La face (1) a une probabilité moitié de celle de la face (2).

Ici : $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$

On appelle : p = P(2) = P(3) = P(4) = P(5)

Alors : P(6) = 2p

et P(1) = $\frac{p}{2}$

Or P(1) + P(2) + P(3) + P(4) +P(5) + P(6) = 1

cela revient à : $\frac{p}{2}$ + 4p + 2p = 1.

c'est-à-dire : $\frac{13}{2}p=1$

donc : $p=\frac{2}{13}$.

e_i	1	2	3	4	5	6
$P(e_i)$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{4}{13}$

Loi de probabilité sur Ω

Remarque :

Si toutes les issues ont même probabilité, on dit qu'elles sont équiprobables. Alors $P(e_i)=\frac{1}{n}$.

Dans l'exemple précédent, il n'y a pas équiprobabilité.

2) Événements

Définition :
Un événement A est une partie de l'univers Ω.
Son événement contraire, noté $\bar{A}$, contient toutes les issues qui n'appartiennent pas à A.

Exemples :
Si A est l'événement "obtenir un nombre pair", alors A = { 2 ; 4 ; 6 }, et $\bar{A}$ = { 1 ; 3 ; 5 }.
Si B est l'événement "obtenir un nombre premier", alors B = { 2 ; 3 ; 5 }, et $\bar{B}$ = { 1 ; 4 ; 6 }.

Remarque :
$\emptyset$ est l'événement impossible.
Ω est l'événement certain.

Définition : (Intersection et union d'événements)
Si A et B sont deux événements, alors :
- $A \cap B$ ("A inter B") est l'événement dont les issues sont à la fois dans A et dans B ;
- $A \cup B$ ("A union B") est l'événement dont les issues sont dans A et dans B.

3) Calculs de probabilités

Définition : La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui constituent A.

Exemple : Si on considère l'événement A précédent (pour l'exemple du dé truqué),
alors $P(A)=\frac{2}{13}+\frac{2}{13}+\frac{4}{13}=\frac{8}{13}$

Conséquences : P($\emptyset$) = 0 et P(Ω) = 1

Propriété : Dans le cas de l'équiprobabilité :

$$P(A)=\frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre d'issues de }\Omega}=\frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

Propriété : Si A et B sont deux événements d'un univers Ω :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

Cas particulier :
Si A et B sont incompatibles, c'est-à-dire A ∩B = $\emptyset$, alors : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

II – Variable aléatoire

1) Variable alétoire : Activité d'introduction

On lance une pièce de monnaie trois fois de suite et à chaque lancer, on note P lorsque "PILE" sort et F lorsque "FACE" sort.
A chaque lancer on a deux possibilités P ou F.
Par exemple, si l'on obtient successivement "PILE", "FACE" et "PILE", on note PFP cette issue de l'expérience aléatoire.

0) Comment représenter l'ensemble de l'expérience ?
1) Donner l'ensemble Ω des issues possibles de cette expérience aléatoire.

L'univers de cette expérience est Ω = { PPP ; PPF ; PFP ; PFF ; FPP ; FPF ; FFP ; FFF }.
Toutes ces issues sont équiprobables.

2) On convient maintenant que chaque "PILE" obtenu fait gagner 2 € et que chaque "FACE" obtenu fait perdre 1 €. On peut associer à chaque issue de Ω le gain du joueur (positif ou négatif).
a) Pour chacune des issues de E, calculer le gain du joueur. Compléter à côté de l'arbre.
b) Quel est l'ensemble des gains possibles ?

__Définition :__
Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire.
Définir une variable aléatoire X sur Ω, c'est associer à chaque issue de Ω un nombre x.

__Remarque :__ Une variable aléatoire est une fonction. X : Ω → ℝ
Cette fonction n'a rien d'aléatoire, puisqu'elle est parfaitement déterminée.

__Notation :__ Soit { x_1 ; x_2 ; ... ; x_r } l'ensemble des valeurs prises par X. L'événement "X prend la valeur x_i " se note $(X=x_i)$.

Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
3) Citer les issues correspondant à l'événement "le gain du joueur est 3 €."
On note (X=3) cet événement.
4) De la même façon, indiquer à quelles issues de Ω sont associés les autres gains du joueur en remplissant le tableau suivant.
5) Interpréter de la même façon, à l'aide des issues de Ω, l'événement $(X>3)$, puis l'événement $(X\leq 0)$.

	X=-3	X=0	X=3	X=6
Issues de Ω	FFF	PFF FPF PFF	PPF PFP FPP	PPP