Chapitre 2 – Second degré

Objectifs :

- Utiliser la forme la plus adaptée d'un polynôme du second degré en vue de la résolution d'un problème : développée, factorisée, canonique.
- Factoriser un trinôme lorsque cela est possible.
- Résoudre une équation du second degré.
- Déterminer le signe d'une fonction polynôme du second degré.
- Résoudre une inéquation du second degré.

Devoir Maison :
Des participants à une conférence ont échangé des poignées de mains et l'un deux a compté qu'il y avait eu en tout 325 poignées de mains. Combien de personnes ont assisté à la conférence ?

Sommaire

I- Polynôme du second degré

Définition : Une fonction polynôme du second degré est une fonction f définie sur ℝ par :

$$f(x)=ax^2+bx+c \text{, où a, b et c sont des réels donnés et } a\neq 0 .$$

Exemples :

- $f(x)=3x^2+4x+2$ est un polynôme du second degré ($a=3$; $b=4$; $c=2$).

- $g(x)=(1+2x)(1+x)$ est un polynôme du second degré.

  Après développement, on obtient : $g(x)=2x^2+3x+1$ avec $a=2$; $b=3$ et $c=1$.

II – Plusieurs formes pour une fonction polynôme de degré 2

La forme développée correspond au polynôme écrit sous la forme d'une somme.
La forme factorisée correspond au polynôme écrit sous la forme d'un produit.

Et la forme canonique ...

Propriété - Définition: Une fonction f polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme :

$$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta \text{ , où a, } \alpha \quad \beta \quad \text{ sont des réels et } a\neq 0 .$$

Cette forme est appelée **forme canonique**.

Démonstration : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur ℝ par : $\mathrm{f(x)=ax^2+bx+c}$ où $\mathrm{a}\neq 0$.

$$f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \quad = \quad a\left(x^2+2x\frac{b}{2\mathrm{a}}+...-...\right)+c$$

$$f(x)=a\left[x^2+2\frac{b}{2\mathrm{a}}x+\left(\frac{b}{2\mathrm{a}}\right)^2-\left(\frac{b}{2\mathrm{a}}\right)^2\right]+c$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2\mathrm{a}}\right)^2-\frac{b^2}{4\mathrm{a}^2}\right]+c$$

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2\mathrm{a}}\right)^2-\frac{b^2}{4\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{ac}}{4\mathrm{a}} \quad = \quad a\left(x+\frac{b}{2\mathrm{a}}\right)^2-\frac{b^2-4\mathrm{ac}}{4\mathrm{a}}$$

Et en posant $\alpha=-\frac{b}{a}$ et $\beta=-\frac{b^2-4\mathrm{ac}}{4\mathrm{a}}$, on obtient la forme canonique de f .

III – Équation du second degré, forme factorisée

Définition : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur ℝ par

$$f(x)=ax^2+bx+c \text{ , où a, b et c sont des réels et } a\neq 0 \text{ .}$$

On appelle **discriminant** associé à f le nombre $\Delta=b^2-4ac$.

Résolution de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$.

Objectif : Résoudre $ax^2+bx+c=0$, où a, b et c sont réels et $a\neq 0$.

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \quad = \quad a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad = \quad a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{(2a)^2}\right]$$

Si $\Delta\geq 0$, $\sqrt{\Delta}$ existe, on peut alors écrire : $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$

En utilisant l'identité remarquable : $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$, on trouve :

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \quad = \quad a\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Propriété : Considérons l'équation $ax^2+bx+c=0$

Soit $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant du trinôme associé à l'équation :

Si $\Delta<0$, il n'y a pas de solution réelle à l'équation.

Si $\Delta=0$, il y a une solution dite « double » : $x_0=-\frac{b}{2a}$

Si $\Delta>0$, il y a deux solutions distinctes $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Vocabulaire : Les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont appelées les racines du polynôme.

Propriété : (Forme factorisée)

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par : $f(x)=ax^2+bx+c$ et Δ son discriminant associé.

Si $\Delta < 0$, f n'a pas de forme factorisée.

Si $\Delta = 0$, pour tout réel x, $f(x)=a(x-x_0)^2$ où $x_0=-\frac{b}{2a}$

Si $\Delta > 0$, pour tout réel x, $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ où $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

IV – Signe du trinôme

<u>Propriété :</u>

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ et Δ son discriminant associé.

Si $\Delta > 0$, on dresse le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a				Signe de a			
Signe de ($x-x_1$)		-	0	+			
Signe de ($x-x_2$)		-			0	+	
Signe de f(x)		Signe de a	0	Signe de (-a)	0	Signe de a	

Si $\Delta = 0$, on dresse le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
a			Signe de a		
Signe de $(x-x_0)^2$		+	0	+	
Signe de f(x)		Signe de a	0	Signe de a	

Si $\Delta < 0$, f(x) a le même signe que a pour tout réel x.