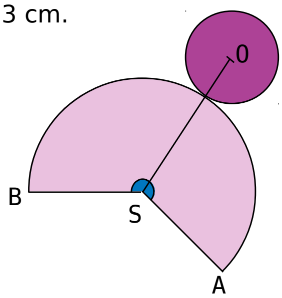
33 *Patron d'un cône de révolution*

On a représenté à main levée, le patron d'un cône de révolution. Les génératrices mesurent 5 cm. Le disque de base, de centre O, a pour rayon R = 3 cm.



a. Nomme une génératrice de ce cône. Calcule la valeur exacte du périmètre du grand cercle ayant pour rayon la longueur de cette génératrice et pour centre le point S.

[SA] est une génératrice du cône.
Le périmètre du grand cercle ayant pour rayon la longueur de cette génératrice et pour centre le point S est égal à : 2π × 5=10π cm.

b. Détermine la valeur exacte du périmètre du cercle de base.

Le périmètre du disque de base est égal à : 2–R=6– cm.

c. Quelle est la valeur exacte de la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$? Justifie.

Quand on reforme le cône, les points A et B sont confondus, donc la longueur de cet arc de cercle est égale au périmètre du disque de base soit 6π cm.

d. On admet qu'il y a proportionnalité entre la mesure de l'angle au centre $\alpha = \widehat{BSA}$ et la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ qui l'intercepte.
Calcule α en utilisant le tableau suivant :

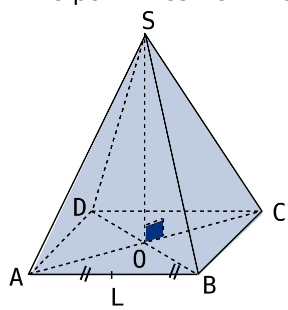
	Longueur	Mesure de l'angle
Grand cercle	10π	360°
Arc de cercle	6π	α

α = 6π × 360 : 10π = 216°

e. À partir des résultats précédents, construis en vraie grandeur le patron de ce cône.

34 *Aire latérale d'une pyramide*

SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD telle que AB = 14 dm et SA = 25 dm. Le point L est le milieu de [AB].



a. Calcule SL. Justifie.

Dans le triangle SAB isocèle en S, la médiane [SL] est aussi hauteur donc SAL est rectangle en L.

Comme SAL est rectangle en L, alors, d'après le théorème de Pythagore :
$SA^2 = SL^2 + LA^2$
$25^2 = SL^2 + 7^2$
$SL^2 = 625 - 49 = 576$
Donc $SL = \sqrt{576} = 24$ dm.

b. Calcule l'aire du triangle SAB.

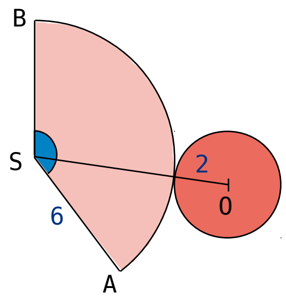
Aire (SAB) = (AB × SL) / 2
= 14 × 24 / 2 = 168 dm²

c. Déduis-en l'aire latérale de la pyramide puis son aire totale.

Aire (SABCDS) = 4 × Aire (SAB) + Aire (ABCD)
= 4 × 168 + 14^2
= 672 + 196 = 868 dm²

35 *Aire latérale d'un cône de révolution*

On a représenté, à main levée, le patron d'un cône de révolution.



a. Calcule le volume de ce cône arrondi au cm^3.

On calcule d'abord la hauteur de ce cône en utilisant le théorème de Pythagore.

$H^2=6^2-2^2=36-4=32$ d'où $h \approx 5,7$

$$V=\frac{\pi \times r^2 \times h}{3}=\frac{\pi \times 2^2 \times 5,7}{3}=8\pi \approx 23,9 \text{ cm}^3$$

b. On admet qu'il y a proportionnalité entre l'aire d'un secteur angulaire et la mesure de l'angle au centre qu'il intercepte.
Calcule cette aire, arrondie au cm², en utilisant le tableau suivant :

	Aire	Mesure de l'angle
Grand disque	36π	360°
Secteur angulaire	A	$\widehat{ASB} = 114°$

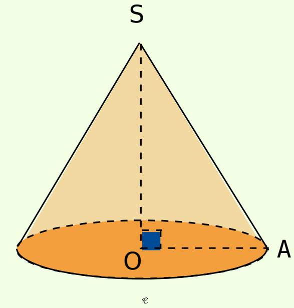
$A \times 360 = 36\pi \times 114$ d'où $A = 11,4\pi \approx 36 \text{ cm}^2$

c. Déduis-en l'aire totale de ce cône arrondie au cm².

Aire (cône) = Aire(Secteur angulaire) + Aire(disque de base)
$= 11,4\pi + 4\pi = 15,4\pi \approx 48 \text{ cm}^2$

36 *Extrait du brevet*

La figure ci-dessous représente un cône de révolution ($\mathscr{C}$) de hauteur SO = 20 cm et de base le cercle de rayon OA = 15 cm.



a. Calculer en cm^3 le volume de ($\mathscr{C}$), on donnera la valeur exacte sous la forme $k\pi$, k étant un nombre entier.

$$V=\frac{\pi \times r^2 \times h}{3}=\frac{\pi \times 15^2 \times 20}{3}=1500\pi \text{ cm}^3$$

b. Montrer que SA = 25 cm.

Comme SOA est rectangle en O, alors, d'après le théorème de Pythagore :
$SA^2 = SO^2 + OA^2$
$SA^2 = 20^2 + 15^2$
$SA^2 = 400 + 225 = 625$
Donc $SA=\sqrt{625} = 25$ cm.

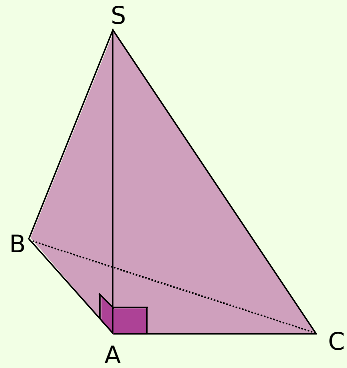
c. L'aire latérale d'un cône de révolution est donnée par la formule $\pi \times R \times SA$ (R désignant le rayon du cercle de base).
Calculer en cm² l'aire latérale de ($\mathscr{C}$).

$\pi \times R \times SA = \pi \times 15 \times 25 = 375\pi \text{cm}^2 \approx 1178,1 \text{cm}^2$

On donnera une valeur exacte sous la forme $n\pi$ (n étant un nombre entier) puis une valeur approchée à 10^{-1} près.

37 *Extrait du brevet*

Soit la pyramide SABC de sommet S et de base ABC.
Les triangles SAB et SAC sont rectangles en A.
Les dimensions sont données en millimètres :
AS = 65 ; AB = 32 ; AC = 60 ; BC = 68.



a. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

Dans le triangle ABC, le plus long côté est [BC].
- D'une part : $BC^2 = 68^2 = 4624$
- D'autre part : $AB^2 + AC^2 = 32^2 + 60^2$
$= 1024+3600=4624$

On constate que $BC^2 = AB^2 + AC^2$
Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

b. Calculer le volume de la pyramide SABC.

$$V = \frac{Aire\ de\ la\ base \times Hauteur}{3}$$
$$V = \frac{Aire(ABC) \times AS}{3} = \frac{AB \times AC \times AS}{6}$$
$$V = \frac{32 \times 60 \times 65}{6} = 20\,800 \text{ mm}^3$$

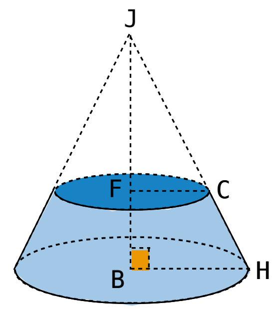
c. Tracer un patron de cette pyramide.

38 *Tronc de cône*

Un tronc de cône est déterminé par un cône ($\mathscr{C}$) duquel on retire un autre cône ($\mathscr{C}'$).

Le tronc de cône représenté ci-dessous est défini par un cône ($\mathscr{C}_1$) de sommet J et de base le disque de rayon [BH] et par un cône ($\mathscr{C}_2$) de sommet J et de base le disque de rayon [FC].

On sait que : BJ = 18 dm ; FJ = 14,4 dm et BH = 12,5 dm. Les droites (FC) et (BH) sont parallèles.



a. Calcule, en justifiant, la longueur FC.

Dans le triangle JBH, les points F et C appartiennent respectivement à [JB] et à [JH]. De plus (FC) et (BH) sont parallèles, donc d'après la proportionnalité des longueurs dans un triangle, on a :

$$\frac{JF}{JB} = \frac{JC}{JH} = \frac{FC}{BH} \text{ d'où } \frac{14{,}4}{18} = \frac{FC}{12{,}5}$$

Donc FC = (14,4 × 12,5) : 18 = 10 dm.

b. Calcule le volume V_1 du cône ($\mathscr{C}_1$) en fonction de π.

$$V1 = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times 12{,}5^2 \times 18}{3} = 937{,}5\pi \text{ dm}^3$$

c. Calcule le volume V_2 du cône ($\mathscr{C}_2$) en fonction de π.

$$V2 = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times 10^2 \times 14{,}4}{3} = 480\pi \text{ dm}^3$$

d. Calcule le volume V_3 du tronc de cône en fonction de π. Donne la valeur arrondie au dm^3.

$V_3 = V_1 - V_2 = 937{,}5\pi - 480\pi = 457{,}5\pi \text{ dm}^3$
$V_3 \approx 1437 \text{ dm}^3$

39 *Extrait du brevet*

Dans tout le problème, les unités employées sont le cm, le cm² et le cm³.

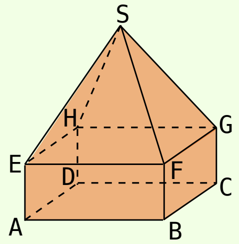
Partie I

On considère le solide représenté ci-dessous :

• ABCDEFGH est un pavé droit de base carrée ABCD avec AB = 1,5 et de hauteur AE = x ;

• SEFGH est une pyramide régulière de hauteur 4 cm.

On appelle V_1 le volume du solide représenté ci-dessous.



a. Démontrer que $V_1 = 2{,}25x + 3$.

V_1 = V(pavé) + V(pyramide)
= $1{,}5\times1{,}5\times x + 1{,}5\times1{,}5\times4 : 3$
= $2{,}25x + 3$

b. Le volume V_1 est-il proportionnel à la hauteur x ? Justifier.

Non. En effet, si on double x , le volume ne sera pas doublé (c'est à cause du « + 3 » dans l'expression de V).

Partie II

On considère un cylindre de révolution dont la base est un disque d'aire 3 cm² et dont la hauteur variable est notée x. On appelle V_2 le volume d'un tel cylindre.

a. Exprimer le volume V_2 en fonction de x.

$V_2 = B \times h = 3x$

b. Le volume V_2 est-il proportionnel à la hauteur x ? Justifier.

Oui, car le Volume est trois fois plus grand que la hauteur.

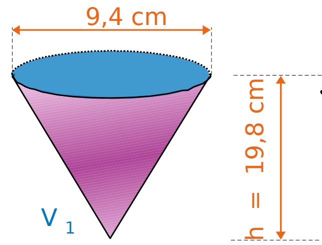
Partie III

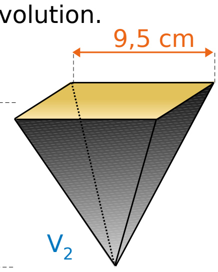
Pour quelle valeur de x les deux solides ont-ils le même volume ? Quel est ce volume ?

$V1 = 2{,}25x + 3 = V_2 = 3x$ soit
$0{,}75x = 3$ soit encore $x = 4$ cm.
On a alors $V1 = V_2 = 3\times4 = 12$ cm³

40 *Déborde ou pas ?*

On considère deux vases, l'un ayant la forme d'une pyramide régulière à base carrée et l'autre celle d'un cône de révolution.





On transvase l'eau du vase V_1 dans le vase V_2 vide, le liquide débordera-t-il ?

Puisque ces 2 volumes ont la même hauteur, le plus volumineux est celui qui aura la base de plus grande surface.

$B_1 = \pi \times R^2 = \pi \times 4{,}7^2 = 22{,}09\pi \approx 69{,}4$ cm²
$B_2 = c^2 = 9{,}5^2 = 22{,}09\pi = 90{,}25$ cm²
(Puisque le cercle de base du cône rentre à l'intérieur du carré de base de la pyramide, ce résultat était prévisible).
D'où $V_1 < V_2$: le liquide ne débordera pas.