SUITES RECURRENTES LINEAIRES D'ORDRE 2

1 Définition

Soit (a,b) un couple de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
Une suite u est *récurrente linéaire d'ordre 2* si elle satisfait à la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \qquad (E)$$

Exemple : suite de Fibonacci (*c*f. cours).

2 Quelques propriétés

Etant donné un couple (a,b) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, notons $\mathbb{U}$ l'ensemble des suites u vérifiant la relation (E).

1. $\mathbb{U}$ n'est pas vide.
   Preuve : la suite nulle appartient à $\mathbb{U}$ qui n'est donc pas vide.
2. La donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 définit une unique suite de $\mathbb{U}$.
3. $\mathbb{U}$ est stable par combinaisons linéaires :
   $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (u, v) \in \mathbb{U} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in \mathbb{U}$.
4. Une suite géométrique de raison q non nulle appartient à $\mathbb{U}$ si et seulement si q est solution de l'équation $x^2 = ax + b$.

   Preuve : D'après la propriété précédente, nous pouvons poser $u_0 = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, q^{n+2} = aq^{n+1} + bq^n \Leftrightarrow q^n(q^2 - aq - b) = 0 \underset{q^n \neq 0}{\Leftrightarrow} q^2 - aq - b = 0$$

Définition : l'équation $x^2 = ax + b$ s'appelle **équation caractéristique** .

3 Expression en fonction de n

Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique $x^2 = ax + b$. Trois cas sont à distinguer :

1. $\Delta > 0$. L'équation caractéristique possède dans ce cas deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 et dans ce cas u appartient à $\mathbb{U}$ si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

2. $\Delta = 0$. L'équation caractéristique possède une solution double notée r. Dans ce cas u appartient à $\mathbb{U}$ si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = (\lambda n + \mu)r^n$$

3. $\Delta < 0$. L'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées ω et $\bar{\omega}$. Posons r = $\mid \omega \mid$ et $\theta = \arg \omega$. Dans ce cas u appartient à $\mathbb{U}$ si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = \lambda r^n \cos(n\theta) + \mu r^n \sin(n\theta)$$

   Remarque : Dans les trois cas ci-dessus, le couple (λ, μ) est déterminé à partir des valeurs des premiers termes de la suite u (cf. infra).

4 Exemples

Etudier les suites suivantes :

1. $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$, $u_0 = 0$, $u_1 = 3$.
   L'équation caractéristique est $x^2 + x - 2 = 0$. Elle admet pour solutions les réels 1 et -2.
   Par conséquent :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda + \mu(-2)^n.$$
   En remplaçant n par 0 puis par 1, nous obtenons le système suivant :
   $$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - 2\mu = 3 \end{cases}$$
   Donc $\lambda = 1$ et $\mu = -1$.
   Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - (-2)^n$.
2. $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$, $u_0 = 5$, $u_1 = 6$.
   L'équation caractéristique est $x^2 - 6x + 9 = 0$. Elle admet pour solution double le réel 3.
   Par conséquent :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)3^n.$$
   En remplaçant n par 0 puis par 1, nous obtenons le système suivant :
   $$\begin{cases} \lambda = 5 \\ 3(\lambda + \mu) = 6 \end{cases}$$
   Donc $\lambda = 5$ et $\mu = -3$.
   Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n(-3n + 5)$.
3. $u_{n+2} = 9u_n$, $u_0 = 5$, $u_1 = 1$.
   L'équation caractéristique est $x^2 - 9 = 0$. Elle admet pour solutions $3i$ et $-3i$.
   Par conséquent :
   $$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = \lambda 3^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \mu 3^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$
   En remplaçant n par 0 puis par 1, nous obtenons le système suivant :
   $$\begin{cases} \lambda = 5 \\ 3\mu = 1 \end{cases}$$
   Donc $\lambda = 5$ et $\mu = \dfrac{1}{3}\cdot$
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = 5 \cdot 3^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot 3^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$