DM pour le 15 janvier 2013 :Correction

Exercice 1.

A.1.a.

• n=3

• Initialisation :

• u prend la valeur 4

• S prend la valeur 2

Traitement :

• u prend la valeur 5, S prend la valeur 2*5/2=5

Sortie : S est entier donc on affiche 1.

• n=4

• Initialisation :

• u prend la valeur 5

• S prend la valeur 2,5

•Traitement :

• u prend la valeur 6, S prend la valeur 2,5*6/2=7,5

Sortie : S n'est entier donc on affiche 0.

2. $S = \dfrac{(n+1)(n+2)}{4}$.

Afin de pouvoir conjecturer un résultat sur le produit des n entiers consécutifs de n+1 à 2n, il est nécessaire de modifier l'algorithme afin qu'il donne la valeur de ce produit. Pour cela, il faut introduire une boucle dans cet algorithme, ce qui donne :

Entrée : n entier supérieur ou égal à 1
Initialisation ; u ← n+1 ; S ← u/2
Traitement et sortie :
Pour k de 1 à n-1
u ← u+1 ; S ← $S * u/2$
Si S est un entier alors afficher 1
Sinon afficher 0.
FinSi
FinPour

B. Démonstration

1.

$$(2n)! = \prod_{k=1}^{2n} k = \prod_{k=1}^{n} 2k \prod_{k=1}^{n} (2k-1) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k \prod_{k=1}^{n} 2k - 1 = 2^n \times n! \times a_n$$

2. $\prod_{k=1}^{n}(n+k) = \dfrac{(2n)!}{n!} = a_n \times 2^n$.

a_n étant un entier naturel, cela implique que $\prod_{k=1}^{n}(n+k)$ est divisible par 2^n.

Exercice 2.

On s'intéresse ici à la réciproque du petit théorème de Fermat.

A. Nombre de Poulet.

1. Il est possible d'utiliser un logiciel de calcul, par exemple xcas.

Par le calcul, et sans utiliser d'astuce (cf. ultra "les nombres de Carmichael"), il "suffit" par exemple, d'écrire 340=34*2*5 et de travailler modulo 341 sur les puissances de 2 suivantes :

$2^{34} \equiv 213^2[341] \equiv 16[341]$.

$2^{68} \equiv 16^4[341] \equiv 65536[341] \equiv 64[341]$.

$2^{340} \equiv 64^5[341] \equiv 1073741824[341] \equiv 1[341]$.

Par conséquent : $2^{340} \equiv 1[341]$ et donc $2^{341} \equiv 2[341]$
Ceci permet d'affirmer que la réciproque du petit théorème de Fermat est fausse : Si p est premier alors pour tout entier naturel a, $a^n - n$ est divisible par p. Mais s'il existe a entier naturel tel que $a^n - n$ est divisible par p, cela ne prouve pas que p est premier.
2. Il faut démontrer que $2^{645} \equiv 2[645]$.
645=3*5*43
$2^{43} \equiv -127[645]$
$2^{43*5} \equiv (-127)^5[645] \equiv 548[645]$
$2^{43*5*3} \equiv 548^3[645] \equiv 2[645]$.
645 est donc un nombre de Poulet.

B. Nombre de Carmichael.

1. Le même principe peut être appliqué pour montrer que 561 est un nombre pseudopremier de base 2 et pseudopremier de base 3, mais la lourdeur des calculs nous incite à réfléchir à une méthode un peu plus générale qui sera exposée dans la question 3. La bonne idée de lire l'énoncé permet de gagner du temps ...
Sinon, en prenant sans temps et en essayant de ne pas se tromper, et en remarquant par exemple que 561=3*11*17, on trouve les deux congruences demandées.
2. Ecrire un algorithme avec algobox (à envoyer aussi par mail) permettant de démontrer que 561 est un nombre pseudopremier de base a pour tout entier a allant de a à 560.
3. 561 semble être un nombre de Carmichael.
a. 561 =3*11*17 b. Faut-il donner la correction ?
c. Soit a un entier naturel premier avec 561. On pose $b = a^{561} - a$. Vérifier que $a^{560} - 1$ est divisible par $a^2 - 1$, par $a^{10} - 1$, par $a^{16} - 1$.
On utilise ici la formule : $(x^n - 1) = (x - 1)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k)$.
Il vient alors : $a^{560} - 1 = a^{280\times 2} - 1 = (a^2 - 1)(\sum_{k=0}^{279} a^{2k})$.
Or $(\sum_{k=0}^{279} a^{2k})$ appartient à $\mathbb{N}$, donc $a^{560} - 1$ est divisble par$(a^2 - 1)$.
Et ainsi de suite : $a^{560} - 1 = a^{56\times 10} - 1 = a^{16\times 35} - 1$.
d. D'après le petit théorème de Fermat :
• $a^{560} - 1$ est divisible par $a^2 - 1$ qui est lui-même divisible par 3 car a est premier avec 3 ,
• $a^{560} - 1$ est divisible par $a^{10} - 1$ qui est lui-même divisible par 11 car a est premier avec 11,
• $a^{560} - 1$ est divisible par $a^{16} - 1$ qui est lui-même divisible par 17 car a est premier avec 17.
D'après le corollaire du théorème de Gauss, $b = a^{560} - 1$ est divisible par 3*11*17=561 car 3,11 et 17 sont premiers entre eux deux à deux.
e. Etudier le cas où a n'est pas premier avec 561 et conclure.

C. Propriété des nombres de Carmichael.

1. Pour a premier avec p_i, $a^{p_i-1} \equiv 1[p_i]$donc par élévation à la puissance, $a^{c-1} \equiv 1[p_i]$.
$a^{c-1} - 1$ est divisible par 3 nombres premiers entre eux donc par leur produit donc $a^{c-1} \equiv 1[c]$.
Si a est multiple de c, $a^c \equiv a[c]$. Si a est un multiple d'un ou de deux p_i ? ? ? ? ? ? ? ?
1105=5*13*17 et 1104=3*16*23 divisible par 4, 12 et 16 donc 1105 est bien un nombre de la sorte.
2. On veut montrer que les nombres de Carmichael sont sans facteurs carrés, ce qui signifie que les nombres premiers de sa décomposition en facteurs premiers ont tous pour exposant 1.
Soit p un diviseur premier de n.
a. Un nombre de Carmichael ne peut être premier, donc n>3.
b. n=k donc $np = kp^2$ et $np \equiv 0[p^2]$.
c. $(p+1)^n = 1 + np + ap^2 donc (p+1)^n \equiv 1[p^2]$.
d. Par définition de n,$(p+1)^n \equiv 1 + p[n]$.

e. Si p^2 divise n, p^2 divise $n(p+1)^n-(1+p)$ d'où le résultat.
f.D'après les question c. et e. p^2 ne peut diviser p donc n est sans facteur carré.

Exercice 3.
f est définie sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions $x \mapsto \mid x \mid$, $x \mapsto \mid x-1 \mid$ et $x \mapsto e^x$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Par composition puis par produit, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
Exprimons maintenant f(x) sans utiliser les valeurs absolues :
$\forall x \leqslant 0, f(x) = -xe^{x-1}$.
$\forall x \in [0;1], f(x) = xe^{x-1}$.
$\forall x \geqslant 1, f(x) = xe^{-x+1}$.
La dérivabilité de f sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$, $]0;1[$ et $]1;+\infty[$ ne pose pas de problème.
• $\forall x \leqslant 0, f'(x) = (-1-x)e^{x-1}$.
$\forall x \leqslant -1, f'(x) \geqslant 0$ et $\forall x \in [-1;0], f'(x) \leqslant 0$.
• $\forall x \in [0;1], f'(x) = (1+x)e^{x-1}$.
$\forall x \in [0;1], f'(x) \geqslant 0$.
• $\forall x \leqslant 0, f'(x) = (1-x)e^{-x+1}$.
$\forall x \in [0;1], f'(x) \leqslant 0$.
• Dérivabilité de f en 0 :
$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -e^{-1}$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = e^{-1}$.
• Dérivabilité de f en 1 :
$\forall x[0;1], \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{xe^{x-1}-1}{x-1}$.
$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{xe^{x-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{(h+1)e^h-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} e^h + \dfrac{e^h-1}{h} = 2$.
• Limite de f en $-\infty$
$\forall x \leqslant 0, f(x) = \dfrac{-x}{e^{-x}}e^{-1}$.
Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

• Limite de f en $+\infty$
$\forall x \geqslant 1, f(x) = \dfrac{x}{e^x}e$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.