Rappels sur les fonctions polynômes

On appelle fonction polynôme de degré n à coefficients réels, toute fonction

$$P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

où les coefficients $a_i,\ i \in \{0,1,\cdots,n\}$ sont des nombres réels, avec $a_n \neq 0$.
Pour tout $i,\ a_i$ est le coefficient de degré $i,\ a_n$ est le coefficient dominant. Si $a_n = 1,$ la fonction P est dite unitaire.

Si P s'annule en une valeur $\alpha,$ alors on peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R},\quad P(x) = (x-\alpha)\times Q(x),$ où Q est une fonction polynôme de degré $n-1$.

Définition : Une racine α de P est d'ordre de multiplicité k si l'on peut écrire :

$\forall x \in \mathbb{R},\quad P(x) = (x-\alpha)^k \times Q(x)$ avec la condition : $Q(\alpha) \neq 0$.

Propriété : α est racine double au moins de P si et seulement si α est racine de P et de sa dérivée $P\,'$.

Démonstration : On suppose α racine de P : $\forall x \in \mathbb{R},\quad P(x) = (x-\alpha)\times Q(x)$.
α est racine double au moins de P si et seulement si α est racine de Q.
Or : $\forall x \in \mathbb{R},\quad P\,'(x) = Q(x) + (x-\alpha)Q'(x)$.
Donc α est racine de Q si et seulement si α est racine de $P\,'$.

Exemple : 1 est racine double de $f : x \mapsto x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6$.
En effet : $f(1) = 1+3-3-7+6 = 0,$ et $f\,' : x \mapsto 4x^3 + 9x^2 - 6x - 7,$ donc $f\,'(1) = 4+9-6-7 = 0$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = (x-1)^2 \times (x^2+5x+6) = (x-1)^2 \times (x+2)(x+3)$.

Théorème : Deux fonctions polynômes sont égales si et seulement si elles sont de même degré, et si leurs coefficients de degré i sont égaux pour tout i variant de 0 à n.

Remarque : Si deux fonctions polynômes de degré n coïncident pour plus de n valeurs, elles sont égales.

Application : Soit f la fonction définie par : $f : x \mapsto \dfrac{5x^3+3x^2-x+2}{x-1}$.

Montrer que l'on peut trouver quatre réels a,b,c,d tels que f s'écrive : $f : x \mapsto ax^2 + bx + c + \dfrac{d}{x-1}$.

Démonstration : f est définie sur $D =]-\infty, 1[\, \cup\,]1, +\infty[$.

Or : $\forall x \neq 1,\quad ax^2 + bx + c + \dfrac{d}{x-1} = \dfrac{ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x + d - c}{x-1}$.

Donc : $\forall x \neq 1,\quad \dfrac{5x^3+3x^2-x+2}{x-1} = ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x-1} \iff \boxed{\forall x \neq 1},\quad 5x^3+3x^2-x+2 = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x+d-c$

$\iff a = 5,\quad b-a = 3,\quad c-b = -1,\quad d-c = 2$

$\iff a = 5,\quad b = 8,\quad c = 7,\quad d = 9.$ *conclure*

Equation du second degré :

Soit $f : x \mapsto ax^2+bx+c,\qquad a \neq 0$.

On peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0,$ l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution réelle ;
  le trinôme ax^2+bx+c n'a pas de racine réelle et garde un signe constant : le signe de a.
- Si $\Delta = 0,$ l'équation $f(x) = 0$ a une solution double $\alpha = \beta = -\dfrac{b}{2a}$;
  le trinôme ax^2+bx+c a une racine double, et : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$.
  le trinôme ax^2+bx+c garde un signe constant : le signe de a.
- Si $\Delta > 0,$ l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions $\alpha = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\beta = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
  le trinôme ax^2+bx+c a deux racines réelles α et β, et : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$.
- On a : $S = \alpha+\beta = -\dfrac{b}{a}$ et $P = \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$.
- Lorsque a et c sont de signe contraire, le trinôme a toujours deux racines.
- **Cas particulier** : lorsque b est pair, on pose $b = 2b'$. Alors : $\Delta = 4(b'^2 - ac)$.
  On pose : $\Delta' = b'^2 - ac,$ et si $\Delta' > 0,$ les racines sont

$$\alpha = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \text{ et } \beta = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

Exemple : Résoudre l'équation $x^2 - 6\sqrt{3}\,x + 15 = 0$.

$\Delta' = \left(-3\sqrt{3}\right)^2 - 15 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 - 15 = 27 - 15 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$. Les solutions sont $3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ et $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

Règle du signe du trinôme du second degré :

Lorsqu'il a des racines, le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a lorsque x est à l'extérieur de l'intervalle des racines,
et du signe contraire de a lorsque x est entre les racines.
S'il n'a pas de racine, le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour toute valeur de x.

exercice : peut-on déterminer m réel tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (m-2)x^2 + (2m+3)x + m + 2 > 0$?

Remarque : deux nombres x et y dont on donne la somme S et le produit P, s'ils existent, sont solutions de l'équation du second degré :

$$X^2 - SX + P = 0.$$

Propriété admise : toute expression symétrique en x et y s'exprime en fonction de leur somme S et de leur produit P.

Exemples : ⋆ si on pose $S_n = x^n + y^n$, $\quad S_1 = S = x + y$, $\quad S_2 = x^2 + y^2 = S^2 - 2P$

⋆ si de plus x et y sont solutions de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$, alors :

pour tout n de $\mathbb{N}$, $aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$, avec $S_1 = S = x + y = -\frac{b}{a}$ et $S_2 = x^2 + y^2 = S^2 - 2P = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}$; $P = xy = \frac{c}{a}$.

Par exemple : $aS_3 + bS_2 + cS_1 = 0$, et donc : $S_3 = x^3 + y^3 = \frac{1}{a}[-b(S^2 - 2P) - cS]$

$$\star \quad \frac{y^3}{x^3} + \frac{x^3}{y^3} = \frac{x^6 + y^6}{P^3} = \frac{(x+y)^6 - 6xy(x^4+y^4) - 15x^2y^2(x^2+y^2) - 20P^3}{P^3}$$
$$= \frac{S^6 - 6P\left((S^2-2P)^2 - 2P^2\right) - 15P^2(S^2-2P) - 20P^3}{P^3}$$

Equation du troisième degré : *résolution par la méthode de Cardan.*

On considère l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, d'inconnue x.

On pose $X = x + \frac{a}{3}$; alors :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \iff \left(X - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(X - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(X - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$
$$\iff X^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)X + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$$

On obtient donc une équation de la forme $\quad X^3 + pX + q = 0$.

On pose alors $X = u + v$ et on a :

$$\begin{aligned} X^3 + pX + q = 0 &\iff (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \\ &\iff u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0 \\ &\iff u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u+v) = 0 \\ &\underset{\text{(il suffit)}}{\Leftarrow} \begin{cases} uv = -\frac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \end{aligned}$$

Si u et v existent, solutions du dernier système, u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $\quad T^2 + qT - \frac{p^3}{27} = 0$,

qui a des solutions réelles si $\Delta = q^2 + 4\frac{p^3}{27} \geq 0$.

• si $4p^3 + 27q^2 = 0$, l'équation a une racine double : $\quad u^3 = v^3 = \frac{-q}{2}$ et $X = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = \frac{3q}{p}$ est solution de $X^3 + pX + q = 0$.

Donc : $\quad X^3 + pX + q = 0 \iff \left(X - \frac{3q}{p}\right)\left(X + \frac{3q}{2p}\right)^2 = 0$.

• si $4p^3 + 27q^2 > 0$, les racines sont $\quad u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ et $v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$.

Donc $X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ est solution de $X^3 + pX + q = 0$.

On démontre que c'est la seule racine réelle (les autres sont complexes : $X' = \mathrm{j}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \mathrm{j}^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

et : $X'' = \mathrm{j}^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \mathrm{j}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$)

• si $4p^3 + 27q^2 < 0$, (ce qui impose $p < 0$, et $q^2 < -\dfrac{4p^3}{27}$, soit $\dfrac{2}{3}p\sqrt{\dfrac{-p}{3}} < q < -\dfrac{2}{3}p\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$), l'équation a trois racines réelles.

(étudier les variations de la fonction $f : X \mapsto X^3 + pX + q$; on pourra poser $p' = \sqrt{\dfrac{-p}{3}}$)

<u>*exercice*</u> : résoudre l'équation $x^3 + 3x^2 + 6x + 2 = 0$ (on trouve $X^3 + 3X - 2 = 0$).

<u>Equation réciproque de première espèce</u> :

C'est une équation de la forme :

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_{n-3}x^3 + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + 1 = 0 \qquad (1)$$

où les coefficients a_i, $i \in \left\{E(\frac{n+1}{2}), \cdots, n-1\right\}$ sont des nombres réels (ou complexes).

<u>*Remarque*</u> : La notation E désignant la partie entière d'un nombre réel est notée dorénavant : $\lfloor . \rfloor$ *(notation officielle)*

★ Si n est <u>impair</u> $(n = 2p+1)$, -1 est racine.

Alors : (1) $\Leftrightarrow (x+1)(x^{2p} + b_{2p-1}x^{2p-1} + b_{2p-2}x^{2p-2} + \cdots + b_{2p-2}x^2 + b_{2p-1}x + 1) = 0$,

où les coefficients b_i, $i \in \{p, \cdots, 2p-1\}$ (ou encore $i \in \left\{\frac{n-1}{2}, \cdots, n-2\right\}$)sont des nombres réels (ou complexes).

★ On est alors ramené au cas n <u>pair</u> : $n = 2p$.

$x = 0$ n'étant pas solution, on peut diviser par x^p et :

$$x^{2p} + b_{2p-1}x^{2p-1} + b_{2p-2}x^{2p-2} + \cdots + b_{2p-2}x^2 + b_{2p-1}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^p + \frac{1}{x^p} + b_{2p-1}\left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}}\right) + \cdots + b_p = 0.$$

On peut alors poser $X = x + \dfrac{1}{x}$ et exprimer $x^p + \dfrac{1}{x^p}$ en fonction de $S = x + \dfrac{1}{x}$ et de $P = x \times \dfrac{1}{x} = 1$.

<u>*exercice*</u> : résoudre l'équation $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$

<u>Equation réciproque de deuxième espèce</u> :

C'est une équation de la forme :

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots - a_{n-3}x^3 - a_{n-2}x^2 - a_{n-1}x - 1 = 0. \qquad (2)$$

où les coefficients a_i, $i \in \left\{E(\frac{n+1}{2}), \cdots, n-1\right\}$ sont des nombres réels (ou complexes).

Si n est impair $(n = 2p+1)$, 1 est racine.

Alors : (2) $\Leftrightarrow (x-1)(x^{2p} + b_{2p-1}x^{2p-1} + b_{2p-2}x^{2p-2} + \cdots + b_{2p-2}x^2 + b_{2p-1}x + 1) = 0$,

où les coefficients b_i, $i \in \{p, \cdots, 2p-1\}$ (ou encore $i \in \left\{\frac{n-1}{2}, \cdots, n-2\right\}$)sont des nombres réels (ou complexes).

On est ramené au cas précédent.

<u>*exercice*</u> : Transformer l'équation $x^5 + ax^4 + bx^3 - bx^2 - ax - 1 = 0$ où a, b sont des réels.
La résoudre lorsque $a = \cos 2\theta$ et $b = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$.

<u>Equations et inéquations irrationnelles</u> :

$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$	$\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$	$\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0, A \geq 0 \\ A < B^2 \end{cases}$
$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$	$\sqrt{A} > \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B \end{cases}$	$\sqrt{A} < \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A < B \end{cases}$

<u>*exercice*</u> : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{2x+1} > x$, $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} < \sqrt{6x-1}$, $\sqrt{x^3 - 6x^2 + 25} = x + 1$.