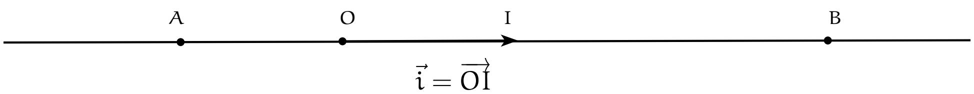
Table des matières

Première partie
Mesures algébriques

1 Définition

Soient A et B deux point d'un axe $(O, \vec{i})$. La *mesure algébrique* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ relativement au vecteur unitaire $\vec{i}$ de cet axe est le réel noté $\overline{AB}$ défini par :

$$\overline{AB} = x_B - x_A.$$



Exercice Soient (O, I) et (O', I') deux repères de la droite (AB). Montrer qu'il existe deux réels α et β avec α non nul, tels que tout point M de (AB) d'abscisse x dans le repère (O, I) a pour abscisse $x' = ax + b$ dans le repère (O', I')

2 Propriétés

A, B et C désignent trois points quelconques d'un même axe $(O, \vec{i})$. Les démonstrations sont laissées en exercice (utiliser les abscisses).

- $\overline{BA} = -\overline{AB}$
- $\overline{AB}^2 = AB^2$
- Relation de Chasles : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
- $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$
- $\overline{AB}$ est indépendant de l'origine choisie sur l'axe
- $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i}$
- $x_B = \dfrac{\overline{OM}}{\overline{OI}}$

Quotient de mesures algébriques

Soient A, B, C et D quatre points alignés distincts deux à deux. Alors le quotient $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ ne dépend pas du repère choisi sur la droite (AB).

Démonstration

Soient (O, I) et (O', I') deux repères de la droite (AB). D'après l'exercice précédent, il existe α et β réels que tout point M de (AB) d'abscisse x dans le repère (O, I) a pour abscisse $x' = ax + b$ dans le repère (O', I'). Il en résulte donc que :

$$\frac{\overline{AB}_{(O',I')}}{\overline{CD}_{(O',I')}} = \frac{b' - a'}{d' - c'} = \frac{(\alpha b + \beta) - (\alpha a + \beta)}{(\alpha d + \beta) - (\alpha c + \beta)} = \frac{b - a}{d - c} = \frac{\overline{AB}_{(O,I)}}{\overline{CD}_{(O,I)}}$$

Cette dernière propriété est fondamentale pour énoncer le théorème de Thalès (cf. infra)

Deuxième partie

Barycentres

Dans cette section, nous nous placerons, sauf mention contraire, indifféremment dans le plan ou dans l'espace qui seront notés E.

1 Barycentre d'un système de deux points pondérés

1.1 Définitions

Théorème et définition Soit $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ un système de deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Il existe un unique point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

G est appelé barycentre du système $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$.
Démonstration Il suffit d'utiliser la relation de Chasles :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} = \beta\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{(\alpha + \beta)}\overrightarrow{AB}.$$

Cette dernière égalité prouve l'existence et l'unicité de G [a].
Définition et propriété
Si $\alpha = \beta \neq 0$, G est appelé isobarycentre de A et de B.
L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment [AB].
Remarques

1. Si A et B sont confondus et si $\alpha + \beta \neq 0$, alors G existe et est confondu avec A et B.
2. Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, alors G existe et est confondu avec B.
3. Si $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, alors G existe et est confondu avec A.
4. Si $\alpha + \beta = 0$, nous avons dans ce cas :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{BA} = \vec{0}.$$

   • Si $\alpha = 0$ ou si A et B sont confondus, l'égalité précédente est équivalente à $\vec{0} = \vec{0}$. Dans ce cas, tout point M vérifie l'égalité $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
   • Si $\alpha \neq 0$ et si $A \neq B$, alors $\alpha\overrightarrow{BA} \neq \vec{0}$. Dans ce cas, il n'existe aucun point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

1.2 Propriétés

Soit $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ un système de deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Soit G le barycentre de ce système.
Propriété 1
Pour tout point M, on a :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}.$$

Propriété 2
Si A et B appartiennent à un plan muni d'un repère quelconque, alors :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \qquad \text{et} \qquad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}.$$

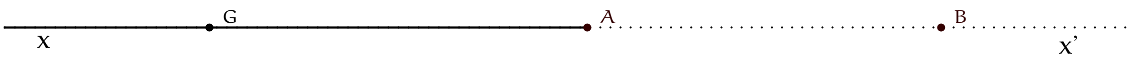
Si A et B appartiennent à l'espace muni d'un repère quelconque, alors :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \qquad \text{et} \qquad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \qquad \text{et} \qquad z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}.$$

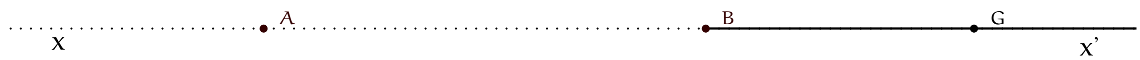
x_G (reps. y_G ; resp z_G) est donc la moyenne pondérée des réels x_A et x_B (resp. de y_A et y_B ; resp. de z_A et z_B) affectés des coefficients α et β.
Propriété : Position de G

a. Rappelons cette propriété essentielle, vraie dans le plan et l'espace :
Soit $\vec{u}$ un vecteur donné et soit A un point quelconque. Il existe alors un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

Ici, A et B sont distincts.
• G appartient à la droite (AB)
• Si α et β sont de même signe, alors G appartient au segment [AB]. Dans ce cas, G est plus près du point ayant le plus grand poids en valeur absolue que de l'autre point.
• Si α et β sont de signes contraires, alors G est à l'extérieur de [AB].
Plus précisément :
G appartient à (xA] si $|\alpha| > |\beta|$:



G appartient à [Bx') si $|\alpha| < |\beta|$:



Propriété : homogénéité du barycentre
Soit k un réel non nul. Alors G est aussi barycentre du système $\{(A, k\alpha), (B, k\beta)\}$.
Exemple : les systèmes $\{(A, -4), (B, -8)\}$; $\{(A, 4), (B, 8)\}$; $\{(A, 1), (B, 2)\}$ ont le même barycentre.
Propriétés
Soient A et B deux points distincts.
• L'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB).
• Le segment [AB] est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients positifs ou nuls. C'est aussi l'ensemble des barycentres des systèmes $\{(A, t), (B, 1-t)\}$ lorsque t varie dans $[0; 1]$.

2 Barycentre d'un système de trois points pondérés

2.1 Définitions

Théorème et définition
Soit $\{(A, \alpha), (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système de trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
Il existe un unique point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

G est appelé barycentre du système $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$.
Définition Si $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$, G est appelé isobarycentre des points A,B et C.

2.2 Propriétés

Soit $\{(A, \alpha), (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système de trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Soit G le barycentre de ce système.
Propriété 1
Pour tout point M, on a :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}.$$

Propriété 2
Si A , B et C appartiennent à un plan muni d'un repère quelconque, alors :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \qquad \text{et} \qquad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Si A,B et C appartiennent à l'espace muni d'un repère quelconque, alors :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \qquad \text{et} \qquad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \qquad \text{et} \qquad z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

x_G (resp. y_G ; resp. z_G) est donc la moyenne pondérée des réels x_A, x_B et xC (resp. de y_A, y_B et y_C ; resp. de z_A, z_B et z_C) affectés respectivement des coefficients α,β et γ.

Propriété : Position de G

- Si $A = B = C$, alors G est confondu avec ces trois points.
- Si A,B et C sont alignés, alors G appartient à la droite (AB).
- Si Si A,B et C ne sont alignés, alors G appartient au plan (ABC).

Ce dernier cas -quoique vrai dans le plan- n'a de réel intérêt que dans l'espace : A,B,C et G sont coplanaires.

Propriété : homogénéité du barycentre

Soit k un réel non nul. Alors G est aussi barycentre du système $\{(A, k\alpha), (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$.

Théorème du barycentre partiel- ou d'associativité du barycentre

Soit $\{(A, \alpha), (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système de trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, de barycentre G.
Si $\alpha+\beta \neq 0$, et si G' est le barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$, alors G est le barycentre du système $\{(G', \alpha+\beta), (C, \gamma)\}$.

Conséquence

L'isobarycentre de trois points A,B et C est le centre de gravité du triangle (ABC).

Propriété

Soient A, B et C trois points non alignés. L'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (ABC).

3 Barycentre d'un système de n points pondérés

3.1 Fonction vectorielle de Leibniz

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des vecteurs formés par les points de E.

3.2 Définition

Définition

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, et $(A_i; \alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système de n points pondérés de E.
La fonction vectorielle de Leibniz f associée au système $(A_i; \alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est l'application définie par :

$$f : \begin{cases} E & \longrightarrow \quad \mathcal{E} \\ M & \mapsto \quad \overrightarrow{f(M)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_k}. \end{cases}$$

3.3 Propriétés

Propriété

- Pour tout couple de points M et M' , on a :

$$\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(M')} = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{MM'}.$$

- Donc si la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ est nulle, la fonction f est constante.

Théorème et définition

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, et $(A_i; \alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système de n points pondérés de E.

On suppose que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ est non nulle.

La fonction vectorielle de Leibniz f associée au système $(A_i; \alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une bijection de E sur $\mathcal{E}$, c'est- à dire :

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{E}, \exists !\, M \in E, \overrightarrow{f(M)} = \vec{u}.$$

En particulier, il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$, c'est-à-dire tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$.

G est appelé barycentre du système $(A_i;\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Propriété

$$\forall M \in E, \overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)\overrightarrow{MA_i}$$

Propriété
Si E est muni d'un repère dans lequel les points $(A_i;\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ ont pour coordonnées $(x_i;y_i)$ (ou $(x_i;y_i;z_i)$ si E représente l'espace); alors G a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i} \quad ; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i} \quad \text{et éventuellement} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}.$$

Homogénéité du barycentre
Soit n un entier supérieur ou égal à 1, et $(A_i;\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système de n points pondérés de E possédant un barycentre G. Soit k un réel non nul.
Alors, G est barycentre du système $(A_i;k\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Associativité du barycentre
Soit n et p des entiers tels que $p \geqslant 3$ et $2 \geqslant p \geqslant n-1$.
Soit $(A_i;\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système de n points pondérés de E possédant un barycentre G.
On suppose de plus que la somme $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i$ est non nulle; soit G' le barycentre du système $(A_i;\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$.
Alors G est le barycentre du système $\{(G', \sum_{i=1}^{p}\alpha_i);(A_{p+1},\alpha_{p+1});\cdots;(A_n,\alpha_n)\}$.

4 Coordonnées barycentriques

4.1 Dans le plan

Donnons-nous trois points A, B et C non alignés dans le plan et rappelons la dernière propriété du paragraphe **2.2** :
Soient A, B et C trois points non alignés. L'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (ABC).
Ceci signifie que pour tout point M du plan , il existe un triplet $(\alpha;\beta;\gamma)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que M est le barycentre $\{(A,\alpha),(B,\beta);(C,\gamma)\}$.
Définition
Le triplet $(\alpha;\beta;\gamma)$ est appelé coordonnées barycentriques de M.
Un point donné possède donc une infinité de coordonnées barycentriques en vertu de la propriété d'homogénéité du barycentre.
Il est possible de contourner ce problème grâce à la définition suivante :
Définition : Tout point M possède un unique triplet de coordonnées barycentriques dont la somme est égale à 1. Ces coordonnées sont les coordonnées barycentriques normalisées de M.

4.2 Dans l'espace

Cette partie est laissée en exercice au lecteur et n'est qu'une réécriture de ce qui précède. Il convient de prendre pour base quatre points A, B, C et D non coplanaires.

5 Ensembles de niveau

Définition Soit f une application de E dans $\mathbb{R}$ et k un réel.
On appelle ensemble de niveau k l'ensemble des antécédents de k par f.

5.1 Etude de $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i{}^2$

Nous reprenons ici les notations de la partie précédente.
Lemme

$$\forall (M, M') \in E^2,\ f(M) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) MM'^2 + 2\overrightarrow{MM'} \cdot (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i}) + f(M') \tag{1}$$

Démonstration Laissée en exercice. Utiliser les égalités suivantes :

$$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2 = AC^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + CB^2$$

Théorème : Cas $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$

Soit G le barycentre du système $(A_i; \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$
L'égalité (1) donne la formule de Leibniz :

$$\forall M \in E, f(M) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) MG^2 + f(G).$$

Dans le plan :
L'ensemble de niveau k de f est soit l'ensemble vide, soit réduit à $\{G\}$, soit un cercle de centre G.
Dans l'espace :
L'ensemble de niveau k de f est soit l'ensemble vide, soit réduit à $\{G\}$, soit une sphère de centre G.

Théorème : Cas $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$

- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} = \overrightarrow{0}$, l'ensemble de niveau k de f est soit l'ensemble vide, soit E .
- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} \neq \overrightarrow{0}$, l'ensemble de niveau k de f est :

dans le plan : une droite orthogonale à $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i}$;

dans l'espace : un plan orthogonal à $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i}$.

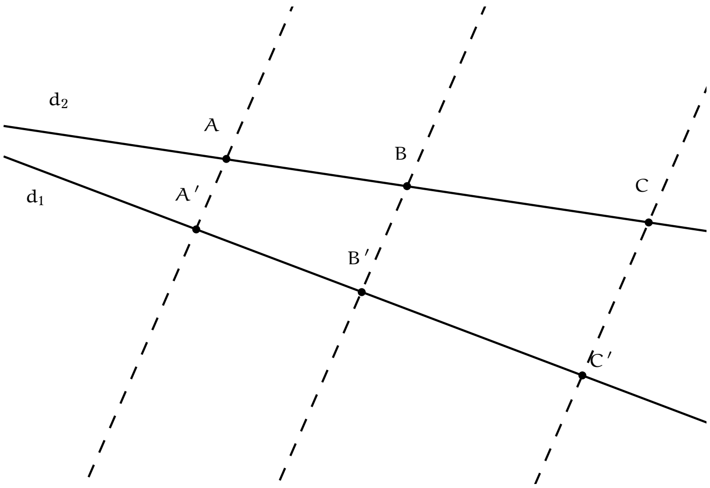
5.2 Etude de $g(M) = \dfrac{MA}{MB}$

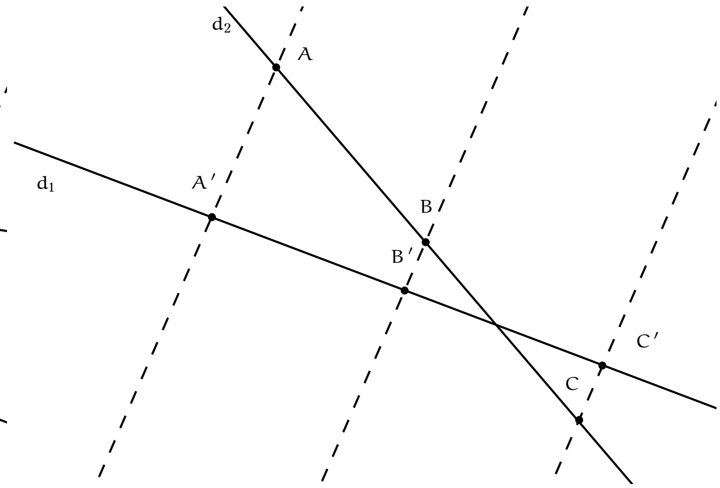
Soit A et B deux points distincts.
Théorème

1. **Si $k < 0$**
   L'ensemble de niveau k de f est vide
2. **Si $k = 1$**
   L'ensemble de niveau k de f est alors :
   - *dans le plan* : la médiatrice de $[AB]$.
   - *dans l'espace* : le plan médiateur de $[AB]$.
3. **Si $k \in \mathbb{R} - \{1\}$**
   Soit G_1 le barycentre de $\{(A, 1), (B, k)\}$ et G_2 le barycentre de $\{(A, 1), (B, -k)\}$.
   L'ensemble de niveau k est alors :
   - *dans le plan* : le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.
   - *dans l'espace* : la sphère de diamètre $[G_1G_2]$.

Troisième partie
Théorème de Thalès

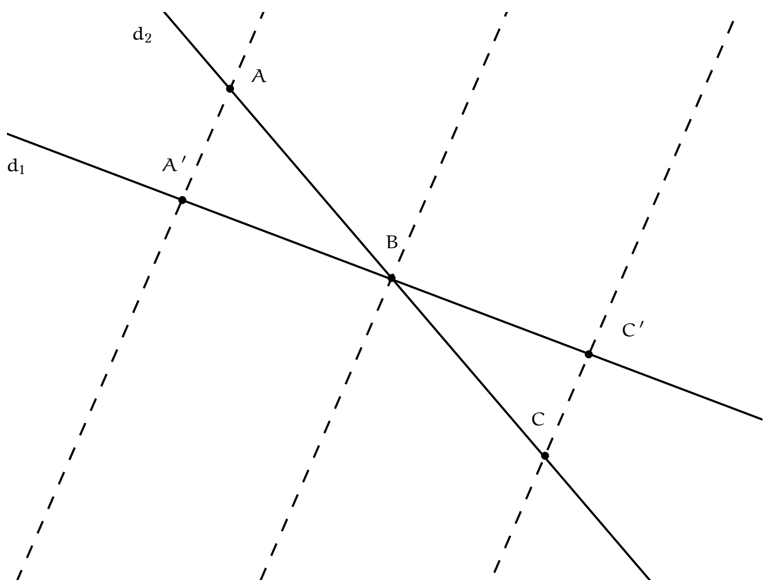
1 Enoncé





Si les droites d_1 et d_2 sont coupées respectivement en A, B, C et en A′, B′, C′ par des droites parallèles, alors :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}.$$

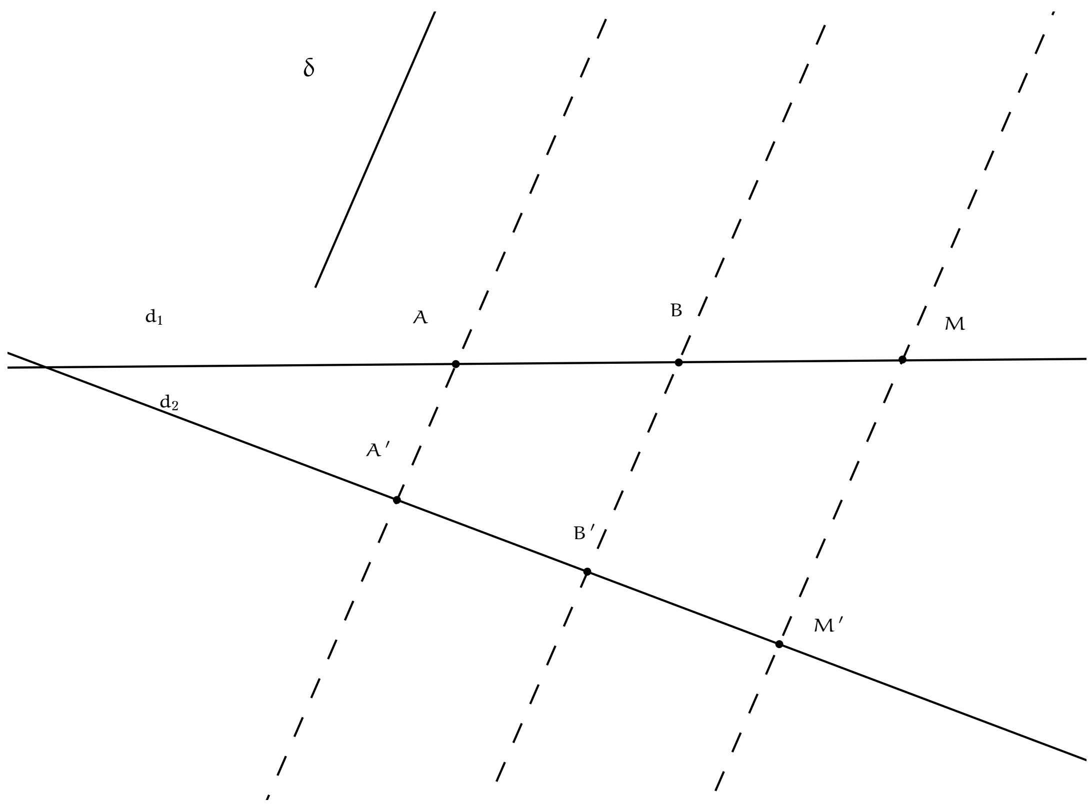


Dans le cas où les droites d_1 et d_2 sont sécantes en B, nous pouvons écrire, :

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AA'}}.$$

2 Théorème de Thalès et projection

2.1 Définition et propriétés d'une projection



Soient d_1 et d_2 deux droites du plan et soit une **direction de droite** δ, distincte de celle de d_2. A tout point M de d_1, on peut associer le point M', intersection de d_2 avec la droite de direction δ passant par M. L'application $p : M \mapsto M'$ est appelée **projection** de d_1 sur d_2 parallèlement à δ : M' est appelé le projeté de M.

Propriétés

• Lorsque d_1 est de direction δ, tous les points de d_1 ont la même image par p qui est l'intersection de d_1 et d_2. Dans ce cas la projection p est dite constante.

• Lorsque d_1 n'est pas de direction δ, deux points distincts de d_1 ont des projetés distincts. De plus, tout point de d_2 possède un unique antécédent par p. On dit alors que **p réalise une bijection de d_1 sur d_2**.

2.2 Autre version de l'énoncé du théorème de Thalès - réciproque

Pour tout point M de d_1 et tout point M' de d_2 :

1. Si M' est le projeté de M, l'abscisse de M' dans le repère $(A'; \overrightarrow{A'B'})$ est égale à celle de M dans le repère $(A; \overrightarrow{AB})$.
2. Réciproquement, si M et M' ont la même abscisse dans les repères respectifs $(A'; \overrightarrow{A'B'})$ et $(A; \overrightarrow{AB})$, alors M' est le projeté de M. En particulier, cela signifie que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

Quatrième partie

Exercices d'application

Exercice 1.

Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles d'un plan (P) tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes en un point I.
On suppose que les droites (BC) et $(B'C')$ se coupent en A_1, (CA) et $(C'A')$ en B_1, (AB) et $(A'B')$ en C_1.
On se propose de démontrer que les points A_1, B_1 et C_1 sont alignés.

1. Montrer qu'il existe des couples de coefficients (α, α'), (β, β') et (γ, γ') tels que I soit le barycentre de :
   - $\{(A, \alpha); (A', \alpha')\}$ et $\alpha + \alpha' = 1$
   - $\{(B, \alpha); (B', \alpha')\}$ et $\beta + \beta' = 1$
   - $\{(C, \gamma); (C', \gamma')\}$ et $\gamma + \gamma' = 1$
2. Montrer alors que : $\beta\overrightarrow{IB} - \gamma\overrightarrow{IC} = \gamma'\overrightarrow{IC'} - \beta'\overrightarrow{IB'} = (\beta - \gamma)\overrightarrow{IA_1}$.
   En déduire que : $(\beta - \gamma)\overrightarrow{IA_1} + (\gamma - \alpha)\overrightarrow{IB_1} + (\alpha - \beta)\overrightarrow{IC_1} = \overrightarrow{0}$.
3. Conclure.

Exercice 2.

Première partie

Soit ABC un triangle non isocèle. On appelle (D_a) la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ et (Δ_a) la bissectrice extérieure de $\widehat{A}$.
On note I_a le point d'intersection de (D_a) et de (BC), A' le pied de la hauteur issue de A, H_B et H_C les projections respectives de I_a sur [AC] et [AB]. On note $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.

1. Exprimer de deux façons différentes les aires des triangles ABI_a et ACI_a. Montrer que I_aB et I_aC sont respectivement proportionnelles à c et b dans le même rapport.
2. Montrer que I_a est barycentre des points B et C affectés respectivement des coefficients b et c.
3. Montrer que (Δ_a) coupe (BC) en un point J_a extérieur à [BC]. Montrer que J_a es barycentre du système $\{(B, b); (C; -c)\}$.

Deuxième partie

1. Soit (C_a) l'ensemble des points tels que : $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{c}{b}$.
   Montrer que (C_a) est le cercle de diamètre $[I_aJ_a]$, et qu'il passe par A. On notera Ω_a son centre et on l'appellera cercle d'Appolonius relatif au sommet A.
2. Montrer la relation suivante : $\overline{\Omega_a B} \times \overline{\Omega_a C} = \Omega_a {I_a}^2 = \Omega_a {J_a}^2$.
3. On définit de même (C_b) et (C_c). Dans la suite, on suppose que $a < b < c$.
   (a) Montrer que les cercles (C_a) et (C_b) sont sécants. On appelle K et L leurs d'intersection.
   (b) Montrer que les points K et L appartiennent à (C_c). En déduire que le trois cercles d'Appolonius sont sécants en K et L.
   (c) Montrer alors que Ω_1, Ω_2 et Ω_3 sont alignés.

Exercice 3.

Dans le plan on considère un triangle ABC rectangle en A. Soit a un réel strictement positif. On suppose que $AB = a$ et $AC = 2a$. Soit I le milieu de [AC].

1. Soit J le barycentre de $\{(A, 3); (C; -1)\}$. Montrer que A est le milieu de [IJ].
2. Déterminer le point G barycentre des points A, B et C affectés des coefficients 3,2 et -1.
3. Déterminer l'ensemble des points tels que :

$$3AM^2 + 2BM^2 - CM^2 = 6a^2.$$

   On pourra remarquer que I appartient à cet ensemble.