EXERCICES SUITES

Exercice 1.

On désigne par u et v les deux suites réelles définies par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = 1 \\ v_1 = 12 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{array}\right. .$$

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad w_n = v_n - u_n.$

1. Démontrer que w est une suite géométrique. Exprimer w_n en fonction de n $(n \in \mathbb{N}^*)$. Etudier la convergence de w.
2. Démontrer que u est croissante et que v est décroissante. Que peut-on conclure à l'aide de la question précédente sur les suites u et v ?
3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = 3u_n + 8v_n$. Démontrer que t est une suite constante. En déduire la limite de u et v.

Exercice 2.

Soient les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par la donnée de u_0 et v_0 avec :

$0 < u_0 \leqslant v_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n} \qquad ; \qquad v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n}.$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. (a) Exprimer $u_n - v_n$ en fonction de u_0 et v_0 .
   (b) Exprimer $\dfrac{u_n}{v_n}$ en fonction de u_0 , v_0 et n.
3. (a) Calculer u_n et v_n dans le cas où l'on a $v_0 = u_0$.
   (b) Préciser, dans ce cas, les limites des suites u et v.
4. (a) Calculer u_n et v_n dans le cas où l'on a $v_0 > u_0$.
   (b) Préciser, dans ce cas, les limites des suites u et v.

Exercice 3.

On considère la suite de Fibonacci : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \end{array}\right.$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n. \qquad (1)$

1. Calculer les dix premiers termes de cette suite.
2. Préciser les suites géométriques de raison r' et r" satisfaisant à la relation (1).
3. Déduire le terme général de la suite u.
4. Montrer que : $\forall\, n$, $u_n = \dfrac{1}{2^n\sqrt{5}} \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{2p+1}{n+1} (\sqrt{5})^{2p+1}.$

Exercice 4. [86]

1. Soit u la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.
   (a) Quelle est la limite éventuelle de cette suite ?
   (b) Prouver **u** est croissante et majorée.
   (c) Etudier de même la suite **v** définie par : $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{1 + v_n}$.
2. Soit **w** la suite définie par $w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{w_n}.$
   (a) Prouver que pour tout entier naturel n, w_n est un réel positif. En déduire que la limite éventuelle ℓ de **w** est un réel positif. Déterminer ℓ.
   (b) Prouver que, si $w_n < \ell$ alors $w_{n+1} > \ell$ et que si $w_n > \ell$ alors $w_{n+1} < \ell$.

(c) Calculer pour tout entier naturel n, $w_{n+2} - w_n$. Prouver que la suite $\mathbf{s}$ définie par $s_n = w_{2n}$ est croissante et majorée par ℓ. Prouver de même que la suite $\mathbf{t}$ définie par $t_n = w_{2n+1}$ est décroissante et minorée par ℓ.

(d) Prouver que les suite $\mathbf{v}$ et $\mathbf{t}$ sont convergentes. Quelles sont leurs limites ?

(e) En déduire que $\mathbf{w}$ converge vers ℓ.

Exercice 5.

Soit $\mathbf{u}$ la suite définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.
2. Déterminer le sens de variation de u.
3. Quelles sont les valeurs éventuelles de sa limite ?
4. Démontrer que la suite $\mathbf{v}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ est géométrique. Calculer son premier terme et sa raison.
5. Quelle est la limite de $\mathbf{v}$? En déduire la limite de la suite $\mathbf{u}$. Vérifier que la suite $\mathbf{u}$ est bien définie sur $\mathbb{N}$.

Exercice 6.

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0\, u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = pu_{n+1} - (p-1)u_n$. a désignant un entier relatif non nul et p un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que w est une suite géométrique et calculer w_n en fonction de p, n et a.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = u_{n+1} - (p-1)u_n$. Montrer que t est une suite constante et calculer t_n en fonction de a.
3. Calculer u_n en fonction de w_n et t_n , puis en fonction de p, n et a.
4. On définit la suite v par : $v_0 = 1$, $v_1 = e^a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \dfrac{(v_{n+1})^p}{(v_n)^(p-1)}$. Montrer en raisonnant par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ et $\ln(v_n) = u_n$. En déduire v_n en fonction de p, n et a.

Exercice 7. [83 FONCTIONS]

On note E l'ensemble des fonctions définies et indéfiniment dérivables sur $]0; +\infty[$.

1. Pour tout élément de f de E, on désigne par g l'application de $]0; +\infty[$ dan $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = xf'(x)$.

   (a) Calculer g'(x) pour tout x de $]0; +\infty[$.

   (b) Montrer par récurrence que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0; +\infty[, g^{(n)}(x) = xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x).$$

2. On considère la fonction f définie de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

   (a) Vérifier par récurrence que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in]0; +\infty[, f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln x}{x^{n+1}}.$$

   (b) Soit les suite u et v définies à partir du rang 1 par :

   $$u_1 = 1, v_1 = 1, \forall n > 0, u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n \text{ et } v_{n+1} = -(n+1)v_n.$$

   Exprimer v_n en fonction de n. Vérifier que :

   $$\forall n > 0, u_n = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$