Exercice bijection

Exercice 1.

1. Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$.
2. Soit arcsin la fonction réciproque de la fonction sinus définie sur $[-1;1]$. Montrer que cette fonction est dérivable sur $]-1;1[$ et déterminer sa dérivée. Courbe représentative ?

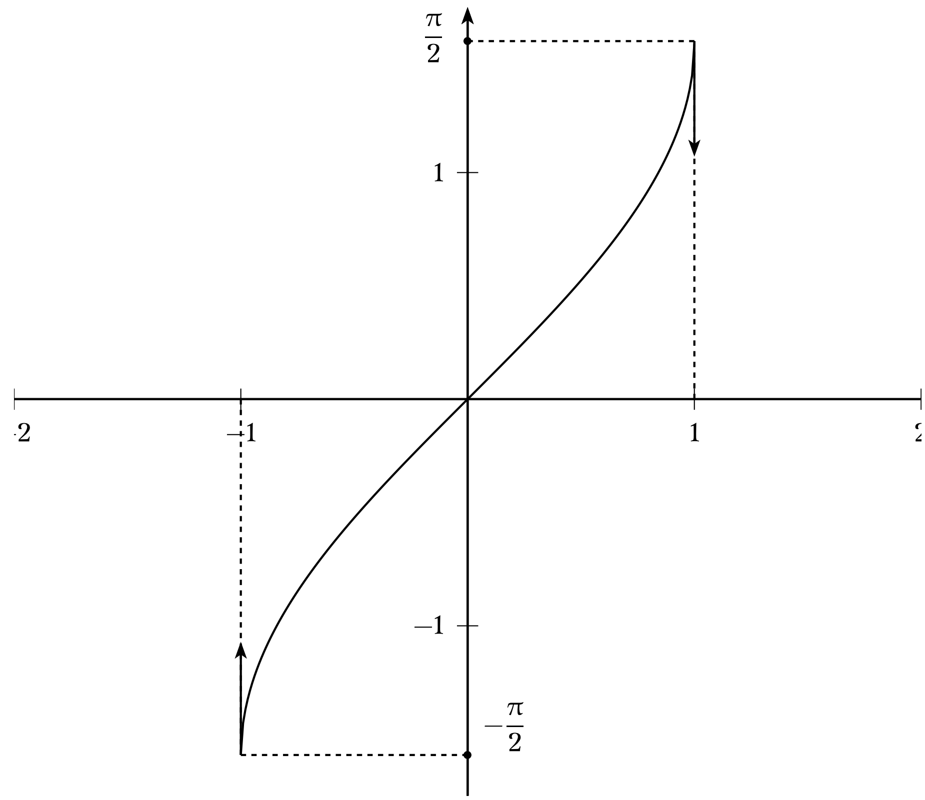
Exercice 2.

1. Montrer que la fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, de bijection réciproque la fonction réciproque arctan.
2. Montrer que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
3. Montrer que : $\forall x > 0, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
4. Déterminer une formule analogue sur $\mathbb{R}_-^*$.

Correction

Exercice 1.

1. La fonction sinus est dérivable, donc continue sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Elle y est strictement croissante et à valeur dans $[-1;1]$. Elle réalise donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$.
2. $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], \sin'(x) = \cos x$, et sur cet intervalle : $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{2}$.
   De plus, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ et $\sin -\frac{\pi}{2} = -1$. Par conséquent, arcsin est dérivable sur $]-1;1[$, et :
   $$\forall x \in]-1;1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))}.$$
   Ce qui se réécrit :
   $$\forall x \in]-1;1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$
   Or arcsin est à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et l'intervalle image de cet intervalle par la fonction cosinus est $[0;1]$ ce qui nous permet d'écrire :
   $$\forall x \in]-1;1[,\ \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}.$$
   Conclusion :
   $$\forall x \in]-1;1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



Exercice 2.

1. La fonction tangente est dérivable, donc continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Elle y est strictement croissante et à valeur dans $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

2. $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \tan'(x) = 1 + \tan^2 x.$

   $\tan'$ ne s'annule donc pas sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. La fonction arctan est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))},$$

   ce qui donne :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))},$$

   soit au final :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}\cdot$$

3. Soit la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\phi(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}\cdot$ La fonction inverse est dérivable sur $]0;+\infty[$ et la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après ce qui précède. Par conséquent la fonction composée $x \mapsto \arctan \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. La fonction ϕ est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

   $$\forall x > 0, \qquad \phi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2},$$

   soit :

   $$\forall x > 0, \qquad \phi'(x) = 0.$$

La fonction ϕ est donc de dérivée nulle sur **l'intervalle** $]0;+\infty[$, elle donc constante sur cet intervalle.
En particulier, puisque $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$, il vient :

$$\forall x > 0, \qquad , \phi(x) = \phi(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion :

$$\forall x > 0, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

4. En reprenant la méthode précédente avec la fonction ϕ mais sur l'intervalle $]-\infty;0[$, et en remarquant que $\arctan -1 = -\dfrac{\pi}{4}$, nous obtenons :

$$\forall x > 0, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Question subsidiaire Montrer que la fonction arctan est impaire.

Remarque. Ces deux dernières questions montrent l'importance de l'intervalle dans la proposition suivante : **une fonction** f **dérivable de dérivée nulle sur un intervalle I y est constante.**

En effet ϕ est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$ mais n'y est pas constante car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle!