

ARITHMÉTIQUE

I Divisibilité

Activité I p 52.

Activité II p 52.

Je retiens

Définition : a et b désignent deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$.

La **division euclidienne** de a par b permet de déterminer deux nombres **entiers** positifs q et r tels que

$$a = b \times q + r \text{ et } r < b.$$

q s'appelle le **quotient** et r s'appelle le **reste**.

Exemple : On effectue $155 \div 4$ et on obtient $155 = 4 \times 38 + 3$ et $3 < 4$.

Dans la division euclidienne de 155 par 4, le quotient entier est 38 et le reste est 3.

Définition : a et b désignent deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$.

On dit que b est un **diviseur** de a lorsqu'il existe un entier positif n tel que $a = n \times b$.

Exemple : $60 = 12 \times 5$ donc 5 est un diviseur de 60, et 12 aussi.

Les diviseurs de 60 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60.

Remarques :

- si b est un diviseur de a , alors le reste de la division euclidienne de a par b est nul.
- si b est un diviseur de a , alors a est un **multiple** de b .
- " b est un diviseur de a " = " b divise a " = " a est divisible par b " = " a est dans la table de b ".

Propriété : tout nombre entier strictement supérieur à 1 a au moins deux diviseurs : 1 et lui-même.

Définition : un nombre entier positif qui a exactement deux diviseurs (1 et lui-même) est un **nombre premier**.

Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19 sont des nombres premiers.

9 a trois diviseurs : 1, 3 et 9 donc 9 n'est pas un nombre premier.

Remarque : 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur : lui-même.

Je m'exerce

Exercices 7, 8, 9, 12, 15 (b,c,d) et 16 (a,c,f) p 58.

II Notion de PGCD

Activité III p 52.

Je retiens

Remarque : comme 1 est un diviseur de tout nombre, alors deux nombres entiers positifs ont au moins un diviseur commun, le nombre 1.

Définition : a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs.

Le **Plus Grand Diviseur Commun** aux nombres a et b s'appelle le **PGCD** des nombres a et b et se note PGCD ($a ; b$).

Exemples :

- les diviseurs de 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6 et 12 et les diviseurs de 15 sont : 1, 3, 5 et 15. Les diviseurs communs à 12 et 15 sont 1 et 3, donc $\text{PGCD}(12 ; 15) = 3$.
- les diviseurs de 10 sont : 1, 2, 5 et 10 et les diviseurs de 9 sont : 1, 3 et 9. Le diviseur commun à 10 et 9 est 1, donc $\text{PGCD}(10 ; 9) = 1$.

Propriétés : a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs.

- $\text{PGCD}(a ; a) = a$.
- $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; a)$
- si b est un diviseur de a , alors $\text{PGCD}(a ; b) = b$.

Je m'exerce

Exercice 21 p 59.

Je retiens

Calcul du PGCD par la méthode des soustractions successives

Propriété : a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs avec $a > b$ alors $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; a - b)$.

Exemple : calculer le PGCD de 91 et 117.

a	b	$a - b$	
117	91	$117 - 91 = 26$	$\text{PGCD}(117 ; 91) = \text{PGCD}(91 ; 26)$
91	26	$91 - 26 = 65$	$\text{PGCD}(91 ; 26) = \text{PGCD}(65 ; 26)$
65	26	$65 - 26 = 39$	$\text{PGCD}(65 ; 26) = \text{PGCD}(39 ; 26)$
39	26	$39 - 26 = 13$	$\text{PGCD}(39 ; 26) = \text{PGCD}(26 ; 13)$
26	13	$26 - 13 = 13$	$\text{PGCD}(26 ; 13) = \text{PGCD}(13 ; 13)$

Or $\text{PGCD}(13 ; 13) = 13$ d'où $\text{PGCD}(91 ; 117) = 13$.

Calcul du PGCD par la méthode des divisions successives (algorithme d'Euclide)

Propriété : a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs avec $a > b$ alors $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b .

Exemple : calculer le PGCD de 91 et 117.

$$\begin{array}{ll} 117 = \mathbf{91} \times 1 + \mathbf{26} & \text{PGCD}(117 ; 91) = \text{PGCD}(91 ; 26) \\ 91 = \mathbf{26} \times 3 + \mathbf{13} & \text{PGCD}(91 ; 26) = \text{PGCD}(26 ; 13) \\ 26 = \mathbf{13} \times 2 + \mathbf{0} & \text{PGCD}(26 ; 13) = 13 \text{ car } 26 \text{ est un multiple de } 13. \end{array}$$

Le PGCD est le **dernier reste non nul** (13 dans cet exemple) d'où $\text{PGCD}(91 ; 117) = 13$.

Je m'exerce

Exercice 40 p 60.

Je retiens

III Fractions irréductibles

Définition : on dit que deux nombres entiers non nuls sont **premiers entre eux** lorsque leur PGCD est égal à 1.

Exemples :

- PGCD (117 ; 91) = 13 alors 117 et 91 ne sont pas premiers entre eux.
- PGCD (10 ; 9) = 1 alors 10 et 9 sont premiers entre eux.

Je m'exerce

Exercice 40 p 60.

Je retiens

Définition : on dit qu'une fraction est **irréductible** si on ne peut plus la simplifier.

Propriété :

- si le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont **premiers entre eux**, alors cette fraction est irréductible.

Ou bien

- si le PGCD du numérateur et du dénominateur d'une fraction **est égal à 1**, alors cette fraction est irréductible.

Exemples :

- 117 et 91 ne sont pas premiers entre eux alors $\frac{91}{117}$ n'est pas irréductible.
- 10 et 9 sont premiers entre eux alors $\frac{10}{9}$ est irréductible.

Rendre une fraction irréductible

Propriété : en simplifiant une fraction par le PGCD du numérateur et du dénominateur, on obtient une fraction irréductible.

Exemple : rendre irréductible la fraction $\frac{221}{323}$.

On calcule PGCD (221 ; 323) la méthode des divisions successives :

$$323 = 221 \times 1 + 102$$

$$\text{PGCD}(323 ; 221) = \text{PGCD}(221 ; 102)$$

$$221 = 102 \times 2 + 17$$

$$\text{PGCD}(221 ; 102) = \text{PGCD}(102 ; 17)$$

$$102 = 17 \times 6 + 0$$

$$\text{PGCD}(102 ; 17) = 17 \text{ car } 102 \text{ est un multiple de } 17.$$

Le **dernier reste non nul** est 17 d'où PGCD (221 ; 323) = 17.

Simplifions la fraction $\frac{221}{323}$ par 17 : $\frac{221}{323} = \frac{17 \times 13}{17 \times 19} = \frac{13}{19}$.

Je m'exerce

Exercice 49 et 43 p 61.

Exercice 94 et 95 p 64.

TICE : exercices 140, 141 et 142 p 69.