DEUXIÈME PARTIE.

MÉMOIRES PUBLIÉS APRÈS LA MORT DE RIEMANN.

SUR

LA POSSIBILITÉ DE REPRÉSENTER UNE FONCTION

PAR UNE SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE.

Mémoires de la Société Royale des Sciences de Göttingue, t. XIII (¹).
Œuvres de Riemann, 2ᵉ édit., p. 230.

(Traduction publiée dans le *Bulletin des Sciences mathém. et astron.*, tome V; juillet 1873.)

Le présent travail sur les séries trigonométriques se compose de deux Parties essentiellement distinctes. La première contient une histoire des recherches et des opinions des géomètres sur les fonctions arbitraires données graphiquement, et sur la possibilité

(¹) Ce Mémoire a été présenté par l'auteur, en 1854, à la Faculté de Philosophie pour son habilitation à l'Université de Göttingue. Bien que l'auteur ne semble pas l'avoir destiné à la publicité, cependant l'impression de ce travail sans aucun changement de forme paraîtra suffisamment justifiée tant par l'intérêt considérable qui s'attache au sujet, que par la manière dont y sont traités les principes les plus importants de l'Analyse infinitésimale.

Brunswick, juillet 1867. R. DEDEKIND.

de les représenter par des séries trigonométriques. Le rapprochement de ces résultats m'a permis de mettre à profit quelques indications de l'illustre géomètre [1] à qui l'on doit le premier travail sur cet objet. Dans la seconde, je soumets la représentation d'une fonction par une série trigonométrique à un examen qui embrasse des cas qui n'ont pas encore été traités jusqu'ici. Il a été nécessaire de faire précéder cette étude d'une courte Note sur la notion d'intégrale définie, et sur l'étendue dans laquelle cette notion est applicable.

Histoire des recherches relatives à la représentation par une série trigonométrique d'une fonction donnée arbitrairement.

§ I.

Les séries trigonométriques, ainsi appelées par Fourier, c'est-à-dire les séries de la forme

$$\begin{gathered} a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots \\ + \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \ldots, \end{gathered}$$

jouent un rôle considérable dans la partie des Mathématiques où l'on rencontre des fonctions entièrement arbitraires; on est même fondé à dire que les progrès les plus essentiels de cette partie des Mathématiques, si importante pour la Physique, ont été subordonnés à la connaissance plus exacte de la nature de ces séries. Dès les premières recherches mathématiques qui ont conduit à la considération des fonctions arbitraires, s'est posée la question de savoir si une fonction entièrement arbitraire pouvait se représenter par une série de la forme ci-dessus.

Cette question a pris naissance vers le milieu du siècle précédent, à l'occasion des recherches sur les cordes vibrantes, dont s'occupaient alors les plus célèbres géomètres. Il serait difficile d'exposer leurs vues sur ce sujet sans entrer dans les détails du problème.

---

[1] Lejeune-Dirichlet.

Sous certaines hypothèses, qui s'accordent de très près avec la réalité, la forme d'une corde tendue, vibrant dans son plan (en désignant par x la distance d'un quelconque de ses points à son extrémité initiale, et par y la distance, au bout du temps t, de ce point à sa position d'équilibre), est, comme on sait, déterminée par l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

α étant indépendant de t et, dans le cas d'une corde d'épaisseur uniforme, indépendant de x.

D'Alembert est le premier qui ait donné une solution générale de cette équation différentielle.

Il a montré (1) que toute fonction de x et de t qui, mise à la place de y, rend cette équation identique, doit être contenue dans la formule

$$f(x+\alpha t) + \varphi(x-\alpha t),$$

ainsi qu'on le voit en introduisant comme variables indépendantes $x+\alpha t$, $x-\alpha t$ à la place de x, t, ce qui change

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{en} \quad 4\,\frac{\partial \dfrac{\partial y}{\partial(x+\alpha t)}}{\partial(x-\alpha t)}.$$

Outre cette équation aux différentielles partielles, qui résulte des lois générales du mouvement, il faut encore que y satisfasse à la condition d'être constamment $=0$ aux points d'attache de la corde; on a donc, en faisant pour l'un de ces points $x=0$, pour l'autre $x=l$,

$$f(\alpha t) = -\varphi(-\alpha t), \qquad f(l+\alpha t) = -\varphi(l-\alpha t),$$

et, par suite,

$$f(z) = -\varphi(-z) = -\varphi[l-(l+z)] = f(2l+z),$$
$$y = f(\alpha t + x) - f(\alpha t - x).$$

Après avoir poussé jusque-là la solution générale du problème, d'Alembert s'occupe, dans une suite à son Mémoire (2), de l'équa-

(1) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, p. 214; 1747.

(2) *Ibid.*, p. 220.

tion $f(z) = f(2l + z)$, c'est-à-dire qu'il cherche des expressions analytiques qui restent invariables lorsque z croît de $2l$.

C'est le mérite essentiel d'Euler, qui a donné, dans le Volume suivant des Mémoires de Berlin [1], une nouvelle exposition de ces travaux de d'Alembert, d'avoir reconnu plus exactement la nature des conditions auxquelles la fonction $f(z)$ doit satisfaire. Il remarqua que, d'après la nature du problème, le mouvement de la corde est complètement déterminé si l'on donne, pour un instant quelconque, la forme de la corde et la vitesse de chaque point $\left(\text{c'est-à-dire } y \text{ et } \frac{\partial y}{\partial t}\right)$, et il fit voir que, si l'on imagine que ces deux fonctions soient définies par des courbes tracées arbitrairement, on peut toujours en déduire, par une simple construction géométrique, la fonction $f(z)$ de d'Alembert. Supposons, en effet, que l'on ait, pour $t = 0$,

$$y = g(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = h(x);$$

il vient, pour les valeurs de x entre o et l,

$$f(x) - f(-x) = g(x), \qquad f(x) + f(-x) = \frac{1}{\alpha}\int h(x)\,dx,$$

et, par suite, on obtient la fonction $f(z)$ entre $-l$ et l. Or de là on déduit la valeur de cette fonction pour toute autre valeur de z, au moyen de l'équation $f(z) = f(2l + z)$. Telle est, en notions abstraites, mais actuellement bien connues, la détermination due à Euler de la fonction $f(z)$.

Cependant d'Alembert protesta contre cette extension donnée à sa méthode par Euler [2], parce que sa méthode supposait nécessairement que y pût s'exprimer analytiquement en t et en x.

Avant qu'Euler eût fait connaître sa réponse, parut un troisième travail sur ce sujet, tout différent des deux premiers et dû à Daniel Bernoulli [3]. Déjà, avant d'Alembert, Taylor avait vu

---

[1] *Mémoires de l'Académie de Berlin*, p. 69; 1748.

[2] *Ibid.*, p. 358; 1750. « En effet, on ne peut, ce me semble, exprimer y analytiquement d'une manière plus générale qu'en le supposant une fonction de t » et de x. Mais, dans cette supposition, on ne trouve la solution du problème » que pour les cas où les différentes figures de la corde vibrante peuvent être » renfermées dans une seule et même équation. »

[3] *Ibid.*, p. 147; 1753.

que l'on a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial y^2},$$

et que, en même temps, y est toujours égal à o pour $x = 0$ et pour $x = l$, si l'on pose

$$y = \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi \alpha t}{l},$$

en prenant pour n un nombre entier. Il expliquait ainsi le fait physique qu'une corde, outre le son fondamental qui lui est propre, peut encore donner le son fondamental d'une corde ayant une longueur égale à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... de la sienne (et d'une constitution d'ailleurs identique), et il regardait sa solution particulière comme une solution générale, croyant que la vibration de la corde, si le nombre entier n était déterminé d'après la hauteur du son, serait représentée, au moins très approximativement, par cette équation. L'observation qu'une corde pouvait donner simultanément ses différents sons conduisit maintenant Bernoulli à cette remarque, que la corde (suivant la théorie) pouvait aussi vibrer conformément à l'équation

$$y = \sum a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi\alpha}{l}(t - \beta_n),$$

et, comme cette équation donnait l'explication de toutes les modifications observées du phénomène, il la considérait comme la plus générale [1]. A l'appui de cette opinion, il étudia les vibrations d'un fil tendu, sans masse, chargé en certains points de masses finies, et fit voir que ces vibrations pouvaient toujours se décomposer en un nombre, égal au nombre des points, de vibrations dont chacune est de même durée pour toutes les masses.

Ces travaux de Bernoulli furent l'occasion d'un nouveau Mémoire d'Euler, imprimé immédiatement à leur suite, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* [2]. Euler y soutient [3], à l'encontre de d'Alembert, que la fonction peut être complètement arbitraire avec les limites $-l$ et $+l$, et remarque [4] que la so-

---

(1) *Loc. cit.*, p. 157, art. XIII.
(2) Année 1753, p. 196.
(3) *Loc. cit.*, p. 214.
(4) *Loc. cit.*, art. III-X.

lution de Bernoulli (qu'il avait déjà prouvé n'être qu'une solution particulière) serait générale dans le cas, et seulement dans le cas, où la série

$$a_1 \sin \frac{x\pi}{l} + a_2 \sin \frac{2x\pi}{l} + \ldots + \frac{1}{2} b_0 + b_2 \cos \frac{x\pi}{l} + b_2 \cos \frac{2x\pi}{l} + \ldots$$

pourrait représenter, pour l'abscisse x, l'ordonnée d'une courbe entièrement arbitraire entre o et l. Or personne, à cette époque, n'avait mis en doute que toutes les transformations que l'on pouvait faire subir à une expression analytique, qu'elle fût finie ou infinie, ne fussent légitimes pour toutes les valeurs des quantités indéterminées, ou du moins que, si elles devenaient inapplicables, ce ne fût seulement que dans des cas tout à fait spéciaux. Il semblait donc impossible de représenter une courbe algébrique, ou généralement une courbe analytique donnée *non périodique* par l'expression périodique ci-dessus, et Euler croyait, en conséquence, devoir décider la question contre Bernoulli.

Cependant le débat entre Euler et d'Alembert n'était pas encore terminé. Cela engagea un jeune géomètre, encore peu connu alors, Lagrange, à tenter la résolution du problème par une voie toute nouvelle, par laquelle il arriva aux résultats d'Euler. Il entreprit [1] de déterminer les vibrations d'un fil sans masse, chargé d'un nombre indéterminé et fini de masses égales et équidistantes, et il rechercha ensuite comment varient ces vibrations lorsque le nombre des masses croît à l'infini. Mais, quelque habileté, quelque richesse d'artifices analytiques qu'il eût déployée dans la première partie de cette étude, le passage du fini à l'infini laissait encore beaucoup à désirer; si bien que d'Alembert, dans un écrit qu'il plaça en tête de ses *Opuscules mathématiques*, put continuer à réclamer pour sa propre solution le mérite de la plus grande généralité. Les opinions des plus grands géomètres de cette époque continuèrent donc à rester divisées sur ce sujet; car, dans leurs travaux ultérieurs, chacun conserva, au fond, son point de vue.

Pour résumer finalement les manières de voir qu'ils ont développées à l'occasion de ce problème touchant les fonctions arbi-

---

(1) *Miscellanea Taurinensia*, t. I. Recherches sur la nature et la propagation du son.

traires et la possibilité de les représenter par une série trigonométrique, Euler avait, le premier introduit ces fonctions dans l'Analyse, et, s'appuyant sur l'intuition géométrique, leur avait appliqué le Calcul infinitésimal. Lagrange ([1]) tint pour exacts les résultats d'Euler (sa construction géométrique de la courbe des vibrations); mais il ne trouva pas satisfaisant les procédés géométriques d'Euler pour traiter ces fonctions. D'Alembert ([2]), au contraire, admettait la manière dont Euler envisageait le Calcul différentiel, et se bornait à contester la justesse de ses résultats, parce que, dans le cas des fonctions entièrement arbitraires, on ne pouvait pas savoir si leurs quotients différentiels étaient continus. Pour ce qui est de la solution de Bernoulli, ils s'accordaient tous les trois à ne pas la considérer comme générale; mais, tandis que d'Alembert ([3]), pour pouvoir déclarer la solution de Bernoulli moins générale que la sienne, était forcé de soutenir qu'une fonction analytique donnée, même périodique, ne peut pas toujours être représentée par une série trigonométrique, Lagrange ([4]) croyait pouvoir démontrer cette possibilité.

§ II.

Près de cinquante années s'étaient écoulées sans que la question de la possibilité de la représentation analytique des fonctions arbitraires fît aucun progrès essentiel, quand une remarque de Fourier vint jeter un nouveau jour sur cet objet. Une nouvelle ère s'ouvrit pour le développement de cette partie des Mathématiques, et s'annonça bientôt d'une manière éclatante par de grandioses développements de la Physique mathématique. Fourier remarqua que, dans la série trigonométrique

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots,$$

([1]) *Miscellanea Taurinensia*, t. II, Pars math., p. 18.
([2]) *Opuscules mathématiques*, t. I, 1761, p. 16, art. VII-XX.
([3]) *Opuscules mathématiques*, t. I. p. 42, art. XXIV.
([4]) *Miscellanea Taurinensia*, t. III, Pars math., p. 221, art. XXV.

les coefficients se déterminent par les formules

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Il vit que cette détermination reste encore applicable lorsque la fonction $f(x)$ est donnée tout à fait arbitrairement; il substitua d'abord pour $f(x)$ une fonction de celles qu'on nomme *discontinues* (l'ordonnée d'une ligne présentant un point de rupture pour certaines valeurs de l'abscisse x), et il obtint ainsi une série qui, effectivement, donnait toujours la valeur de la fonction.

Quand Fourier, dans un de ses premiers travaux sur la chaleur, présenté à l'Académie des Sciences le 21 décembre 1807 (1), énonça pour la première fois cette proposition, qu'une fonction donnée (graphiquement) d'une manière tout à fait arbitraire pouvait s'exprimer par une série trigonométrique, cette assertion parut à Lagrange si inattendue, que l'illustre vieillard la contesta de la manière la plus formelle. Il doit exister encore (2) sur ce débat une pièce écrite dans les Archives de l'Académie de Paris. Malgré cela, Poisson, partout où il se sert des séries trigonométriques pour représenter des fonctions arbitraires, renvoie (3) à un passage des travaux de Lagrange sur les cordes vibrantes, où cette représentation doit se trouver. Pour réfuter cette allégation, qu'on ne peut expliquer qu'en se rappelant la rivalité qui existait entre Fourier et Poisson (4), nous sommes forcés de revenir encore une fois au Mémoire de Lagrange; car les Recueils publiés par l'Académie ne contiennent rien sur cet objet.

On trouve effectivement, à l'endroit cité par Poisson (5), la formule

$$\begin{aligned} y &= 2\int Y \sin X\pi\,dX \times \sin x\pi + 2\int Y \sin 2X\pi\,dX \times \sin 2x\pi \\ &\quad + 2\int_1 Y \sin 3X\pi\,dX \times \sin 3x\pi + \ldots + 2\int Y \sin nX\pi\,dX \times \sin nx\pi, \end{aligned}$$

(1) *Bulletin des Sciences pour la Société philomathique*, t. I, p. 112.

(2) D'après une Communication verbale du professeur Dirichlet.

(3) Notamment dans son Ouvrage le plus répandu, son *Traité de Mécanique*, n° 323, t. I, p. 638.

(4) Le Compte rendu dans le *Bulletin des Sciences* sur le Mémoire présenté par Fourier à l'Académie est de Poisson.

(5) *Miscellanea Taurinensia*, t. III, Pars math., p. 261.

« de sorte que, lorsque $x = X$, on aura $y = Y$, Y étant l'ordonnée qui répond à l'abscisse X. »

Cette formule a bien le même aspect que la série de Fourier, et peut, au premier coup d'œil, être confondue avec elle; mais cette apparence provient simplement de ce que Lagrange a employé le signe $\int dX$ là où nous emploierions aujourd'hui le signe $\Sigma\Delta X$. Elle donne la solution de ce problème : Déterminer la série finie de sinus

$$a_1 \sin x\pi + a_2 \sin 2x\pi + \ldots + a_n \sin nx\pi,$$

de façon que, pour les valeurs $\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1}$ de x, que Lagrange désigne d'une façon indéterminée par X, elle prenne des valeurs données. Si Lagrange avait fait n infini dans cette formule, il serait bien parvenu au résultat de Fourier; mais, lorsqu'on lit complètement son Mémoire, on voit qu'il est fort éloigné de croire qu'une fonction tout à fait arbitraire puisse réellement être représentée par une série infinie de sinus. Il avait, au contraire, entrepris tout son travail, parce qu'il croyait que ces fonctions arbitraires ne sont pas exprimables par une formule, et, quant à la série trigonométrique, il pensait qu'elle peut représenter toute fonction périodique donnée analytiquement. Aujourd'hui, il est vrai, nous avons peine à concevoir que Lagrange ne dût pas arriver de sa formule de sommation à la série de Fourier; mais cela s'explique par cette circonstance, que le débat entre Euler et d'Alembert avait fait naître dans son esprit une opinion arrêtée sur la voie qu'il fallait suivre. Il croyait que l'on devait commencer par résoudre complètement le problème des vibrations pour un nombre fini indéterminé de masses, avant d'employer les considérations de limites. Ces considérations exigent une étude assez étendue (¹), qui eût été inutile s'il avait connu la série de Fourier.

C'est Fourier qui a, le premier, compris d'une manière exacte et complète la nature des séries trigonométriques (²). Celles-ci ont été, depuis, employées de diverses manières en Physique ma-

---

(¹) *Miscellanea Taurinensia,* t. III, Pars math., p. 251.

(²) *Bulletin des Sciences,* t. I, p. 115. « Les coefficients a, a', a'', ... étant ainsi déterminés, etc. »

thématique pour la représentation des fonctions arbitraires, et, dans chaque cas particulier, on s'est aisément convaincu que la série de Fourier convergeait effectivement vers la valeur de la fonction; mais on est resté longtemps avant de pouvoir démontrer généralement cet important théorème.

La démonstration donnée par Cauchy dans un Mémoire lu, le 27 février 1826, à l'Académie de Paris (1), est insuffisante, comme Dirichlet l'a fait voir (2). Cauchy suppose que, si, dans une fonction périodique $f(x)$, donnée arbitrairement, on remplace x par un argument complexe $x+yi$, cette fonction est finie pour toute valeur de y; mais cela n'a lieu que pour le *seul* cas où la fonction est égale à une grandeur constante. Il est cependant facile de voir que cette supposition n'est pas nécessaire pour la suite des conclusions. Il suffit que l'on ait une fonction $\varphi(x+yi)$, qui soit finie pour toutes les valeurs positives de y, et dont la partie réelle devienne égale, pour $y=0$, à la fonction périodique donnée $f(x)$. Si l'on admet préalablement cette proposition, qui est, en effet, vraie (3), la voie proposée par Cauchy conduit alors au but, comme, réciproquement, cette proposition peut se déduire du théorème de Fourier.

§ III.

En janvier 1829 parut, dans le *Journal de Crelle* (4) un Mémoire de Dirichlet, où la possibilité de la représentation par les séries trigonométriques se trouvait établie en toute rigueur pour les fonctions qui sont, en général, susceptibles d'intégration, et qui ne présentent pas une infinité de maxima et de minima.

Il arriva à la découverte du chemin à suivre pour obtenir la solution de ce problème, par la considération que les séries infinies se partagent en deux classes, suivant qu'elles restent ou non convergentes, lorsqu'on rend tous leurs termes positifs. Dans les premières, les termes peuvent être intervertis d'une manière quel-

---

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VI, p. 603.

(2) *Journal de Crelle*, t. 4, p. 157 et 158.

(3) La démonstration se trouve dans la Dissertation inaugurale de l'auteur.

(4) T. 4, p. 157.

conque; dans les autres, au contraire, la valeur dépend de l'ordre des termes. Si l'on désigne, en effet, dans une série de la seconde classe, les termes positifs successifs par

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots,$$

et les termes négatifs par

$$-b_1, \quad -b_2, \quad -b_3, \quad \ldots,$$

il est clair que Σa, ainsi que Σb, doit être infinie; car, si ces deux sommes étaient finies l'une et l'autre, la série serait encore convergente lorsqu'on donnerait à tous les termes le même signe; si une seule était infinie, la série serait divergente. Il est clair maintenant que la série, en plaçant les termes dans un ordre convenable, pourra prendre une valeur donnée quelconque C; car, si l'on prend alternativement des termes positifs de la série jusqu'à ce que sa valeur soit plus grande que C, puis des termes négatifs jusqu'à ce que sa valeur soit moindre que C, la différence entre cette valeur et C ne surpassera jamais la valeur du terme qui précède le dernier changement de signe. Or les quantités a, aussi bien que les quantités b, finissant toujours par devenir infiniment petites pour des valeurs croissantes de l'indice, les écarts entre la somme de la série et C deviendront encore infiniment petits, lorsqu'on prolongera assez loin la série, c'est-à-dire que la série converge vers C.

C'est aux seules séries de la première classe que l'on peut appliquer les lois des sommes finies; elles seules peuvent être considérées comme l'ensemble de leurs termes; celles de la seconde classe ne le peuvent pas : circonstance qui avait échappé aux mathématiciens du siècle dernier, principalement par la raison que les séries qui procèdent suivant les puissances ascendantes d'une variable appartiennent, généralement parlant (c'est-à-dire à l'exception de certaines valeurs particulières de cette variable), à la première classe.

La série de Fourier, évidemment, n'appartient pas nécessairement à la première classe; on ne pouvait donc point, comme Cauchy avait vainement tenté de le faire (¹), déduire sa conver-

(¹) DIRICHLET, *Journal de Crelle*, t. 4, p. 158 : « Quoi qu'il en soit de cette première observation, ... à mesure que n croît. »

gence de la loi suivant laquelle les termes décroissent. Il fallait montrer, au contraire, que la série finie

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\sin x \\
&\quad+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin 2\alpha\,d\alpha\sin 2x+\ldots+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha\sin nx \\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha\cos x \\
&\quad+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos 2\alpha\,d\alpha\cos 2x+\ldots+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha\cos nx,
\end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose, que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}\,d\alpha$$

s'approche indéfiniment de la valeur $f(x)$, pour n croissant à l'infini.

Dirichlet fonde cette démonstration sur les deux propositions suivantes :

1° Si $0 < c \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2}$, l'intégrale

$$\int_b^c \varphi(\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta,$$

pour n croissant indéfiniment, tend vers la valeur $\frac{\pi}{2}\,\varphi(0)$;

2° Si $0 < b < c \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2}$, l'intégrale

$$\int_0^c \varphi(\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta,$$

pour n croissant indéfiniment, tend vers la valeur zéro;

la fonction $\varphi(\beta)$ étant supposée toujours décroissante ou toujours croissante entre les limites de ces intégrales.

A l'aide de ces deux propositions, on peut évidemment, si la fonction ne passe pas un nombre infini de fois d'une marche croissante à une marche décroissante et *vice versa*, décomposer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}\,d\alpha$$

en un nombre *fini* de termes, dont l'un converge vers $\frac{1}{2}f(x+0)$ (¹), un autre vers $f(x-0)$, et tous les autres vers 0, lorsque n croît à l'infini.

De là résulte que l'on peut représenter par une série trigonométrique toute fonction se reproduisant périodiquement après l'intervalle 2π, et

1° Qui est généralement susceptible d'intégration;

2° Qui n'a pas un nombre infini de maxima et de minima;

3° Qui, dans le cas où sa valeur varie brusquement, prend la valeur moyenne entre les valeurs limites prises de part et d'autre de la discontinuité.

Une fonction qui jouit des deux premières propriétés, et non de la troisième, ne peut évidemment pas être représentée par une série trigonométrique : car la série trigonométrique qui la représenterait en dehors des discontinuités en différerait aux points mêmes de discontinuité; mais une fonction ne remplissant pas les deux premières conditions peut-elle, et dans quel cas peut-elle être représentée par une série trigonométrique? C'est le point que les recherches de Dirichlet laissent indécis.

Ce travail de Dirichlet a donné une base solide à un grand nombre de recherches analytiques importantes. En mettant en pleine lumière un point sur lequel Euler s'était trompé, il a réussi à éclaircir une question qui avait occupé, depuis plus de soixante-dix ans (depuis l'année 1753), tant d'éminents géomètres. En effet, pour tous les cas de la nature, les seuls dont il s'agit ici, la

(¹) On démontre sans difficulté que la valeur d'une fonction f, qui n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, l'argument tendant vers x, soit par des valeurs décroissantes, soit par des valeurs croissantes, doit toujours ou converger vers les valeurs finies $f(x+0)$ et $f(x-0)$ (d'après la notation de Dirichlet, *Dove's Repertorium der Physik*, t. I, p. 170), ou devenir infiniment grande [1].

question était complètement résolue; car, si peu que nous sachions comment les forces et les états de la matière varient avec le lieu et avec le temps dans les infiniment petits, nous pouvons cependant admettre en toute sécurité que les fonctions auxquelles ne s'appliqueraient pas les recherches de Dirichlet ne se rencontrent pas dans la nature.

Toutefois, ces cas non élucidés par Dirichlet semblent, pour une double raison, mériter l'attention.

En premier lieu, comme Dirichlet lui-même le remarque à la fin de son Mémoire, cet objet est intimement lié avec les principes du Calcul infinitésimal, et peut servir à porter dans ces principes une plus grande clarté et une plus grande précision. Sous ce rapport, l'étude de cette question offre un intérêt immédiat.

Mais, en second lieu, l'application des séries de Fourier n'est pas restreinte aux seules recherches physiques; on l'emploie aussi maintenant avec succès dans une branche des Mathématiques pures, la Théorie des nombres, et ici ce sont précisément les fonctions dont Dirichlet n'a pas étudié la représentation en série trigonométrique qui semblent être les plus importantes.

A la fin de son Mémoire, Dirichlet promet bien de revenir plus tard sur ces cas; mais sa promesse est restée jusqu'ici sans effet. Les travaux de Dirksen et de Bessel sur les séries de sinus et de cosinus ne fournissent pas ce complément; ils sont, au contraire, inférieurs à celui de Dirichlet sous le rapport de la rigueur et de la généralité. Le Mémoire de Dirksen, publié presque en même temps que celui de Dirichlet (1), dont évidemment Dirksen n'avait pu prendre connaissance, suit en général une bonne marche; mais il contient quelques inexactitudes de détail. Sans parler, en effet, de ce que, dans un cas spécial (2), il trouve pour la somme de la série un résultat faux, il s'appuie, dans une étude accessoire, sur un développement en série (3), qui n'est possible que dans des cas particuliers, de sorte que sa démonstration n'est complète que pour les fonctions dont la première dérivée est toujours finie. Bessel (4)

(1) *Journal de Crelle*, t. 4, p. 176.
(2) *Loc. cit.*, formule (22).
(3) *Loc. cit.*, art. 3.
(4) SCHUMACHER, *Astronomische Nachrichten*, n° 374 (t. XVI, p. 229).

cherche à simplifier la démonstration de Dirichlet; mais les modifications apportées dans cette démonstration ne donnent aucune simplification essentielle dans les conclusions, et servent tout au plus à les revêtir d'une forme plus habituelle, ce dont la rigueur et la généralité ont notablement à souffrir.

La question de la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique n'est donc résolue, jusqu'ici, que dans ces deux hypothèses, que la fonction soit généralement susceptible d'intégration et n'ait pas un nombre infini de maxima et de minima. Si cette dernière hypothèse n'est pas admise, les deux théorèmes d'intégration de Dirichlet ne suffisent plus pour décider la question; mais si la première hypothèse est rejetée, la règle de Fourier pour la détermination des coefficients n'est déjà plus applicable. La voie que nous allons suivre pour étudier cette question, sans faire de suppositions particulières sur la nature de la fonction, dépend de là, comme on le verra; une voie aussi directe que celle de Dirichlet n'est pas possible par la nature même du problème.

Sur la notion de l'intégrale définie, et sur l'étendue dans laquelle elle est applicable.

§ IV.

L'incertitude qui règne encore sur quelques points fondamentaux de la théorie des intégrales définies nous oblige à placer ici quelques remarques sur la notion de l'intégrale définie, et sur la généralité dont elle est susceptible.

Et d'abord que doit-on entendre par

$$\int_a^b f(x)\,dx?$$

Pour répondre à cette question, prenons entre a et b une série de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, rangées par ordre de grandeur, depuis a jusqu'à b, et désignons pour abréger $x_1 - a$ par δ_1, $x_2 - x_1$ par $\delta_2, \ldots, b - x_{n-1}$ par δ_n; soient, en outre, ε_i des