Les régimes transitoires

Réaliser par :

- Mimoun Amggoun
- Hassan mssaadi
- Sabah Zerrouk
- Loubna Zaim
- Omal Belali

Introduction

Dans un circuit comprenant des dipôles passifs linéaires et des sources connues par leur force électromotrice ou leur courant de court-circuit, on cherche à déterminer l'évolution temporelle d'une tension ou d'un courant du circuit.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons de près au régime transitoire qui précède le régime permanent.

En physique, un régime transitoire est le régime d'évolution d'un système qui n'a pas encore atteint un état stable ou un régime établi (permanent ou périodique). Un régime transitoire peut apparaître lors d'une modification d'un système. Il peut être caractérisé par un taux d'amortissement, un temps de relaxation ou encore un facteur de qualité. Au contraire le régime permanent est un Régime dans lequel ces grandeurs peuvent dépendre du temps, les variations étant permanentes au cours du temps; exemple : régime permanent sinusoïdal.

Pour un circuit électrique un régime transitoire apparaît par exemple à l'ouverture ou à la fermeture d'un interrupteur, à la modification de la tension ou de l'intensité délivrée par un générateur, au passage d'un signal continu à un signal périodique. Il prend la forme d'un régime apériodique ou d'un régime pseudopériodique

Pour établir les équations décrivant l'évolution des grandeurs inconnues, On applique la loi des mailles et la loi des nœuds, aussi bien que les relations qui relient les courants et les tensions des éléments. Dans le cas des circuits réactifs, ces relations sont en général de nature différentielle.

Pour une résistance :

$$U_R = R.I_R$$

Pour une capacité

$$I_C = C.\frac{dU_C}{dt}$$

Pour une inductance

$$U_L = L.\frac{dI_L}{dt}$$

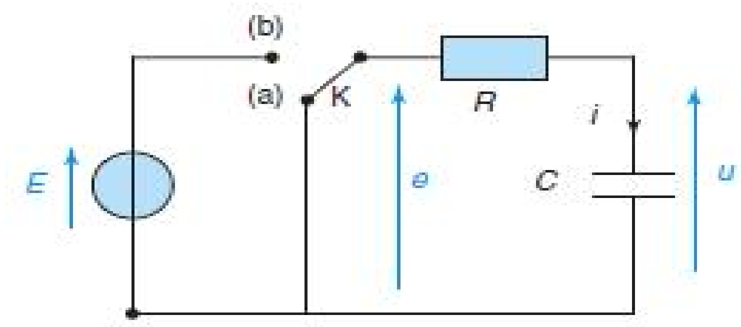
Circuits du 1er ordre.

Un circuit linéaire est dit du premier ordre si les variations temporelles de toute grandeur électrique du circuit sont régies par une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

1. Circuit RC série

1. Montage d'étude

L'interrupteur K est dans la position (a). L'intensité du courant et la tension aux bornes du condensateur sont nulles.



2. Circuit RC série soumis à un échelon de tension

Quand on bascule l'interrupteur K de la position (a) à la position (b), la tension *e* passe instantanément de la valeur nulle à la valeur *E*.

- L'équation différentielle

On applique la loi des mailles on trouve : $U_R + U_C = E$

Avec
$$\begin{cases} U_R = R.I_R \\ I_C = I_R = C.\frac{dU_C}{dt} \end{cases}$$

Donc
$$\boxed{\tau.\frac{dU_C}{dt} + U_C = E \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et à second membre non nul.

- Résolution de l'équation différentielle.

On cherche la Solution sans seconde membre (SSSM).

$\tau.\frac{dU_C}{dt}+U_C=0 \quad \Rightarrow \quad \tau.\frac{dU_C}{dt}=-U_C$ Donc $\frac{dU_C}{U_C}=-\frac{dt}{\tau}$

On intègre les deux termes $\ln U_C=-\frac{1}{\tau}t+K$ avec K est une constante

Donc

$$U_{ssm}=e^{(-\frac{1}{\tau}t+K)} \quad =K_1e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad avec\ K_1=e^K$$

Donc la solution générale est $U_C=K_1e^{-\frac{1}{RC}t}+E$

Pour trouver K_1 on utilisé la condition initiale imposée au circuit, à savoir la continuité de la tension aux bornes du condensateur :

$U_c(t=0^-)=U_c(t=0^+)=0$

Il vient :

$K_1+E=0 \quad \Rightarrow \quad K_1=-E$

Donc la résolution de l'équation différentielle de premier ordre est

$$U_C=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad avec \quad \tau=RC$$

3. Régime libre du circuit RC

Maintenant en bascule l'interrupteur K de la position (a) et en applique la loi de la maille dans le nouveau circuit $U_R+U_C=0$

Donc

$$\tau.\frac{dU_C}{dt}+U_C=0$$

La solution de cette équation est de la forme

$$U_C=A.e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Avec $U_c(t=0^-)=U_c(t=0^+)=E$ Donc K=E

est la solution donc

$U_C = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$ $avec$ $\tau = RC$

4. Bilan énergétique

Énergie stockée par le condensateur pendant le régime transitoire :

$$W_c = \frac{1}{2} CU_C{}^2 = \frac{1}{2} Cu_{t=0}{}^2 = \frac{1}{2} CE^2$$

Énergie fournie par la source pendant le régime transitoire :

$$W_E = \int_0^{\infty} Eidt = CE^2$$

Énergie dissipée par effet Joule dans le résistor pendant le régime transitoire :

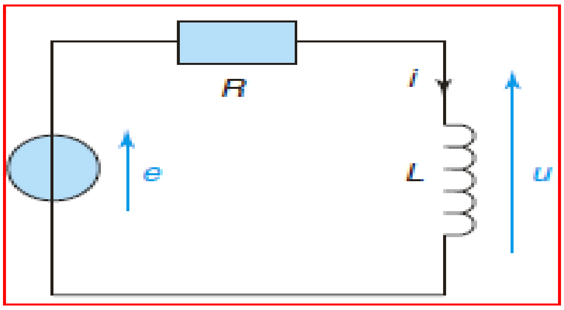
$$W_R = W_E - W_C = \frac{1}{2} CE^2$$

En régime permanent continu, le courant est nul donc la puissance reçue par le circuit *RC* est nulle.

2. Circuit RL série :

✓ Montage d'étude :

Supposons qu'à date la tension *e* passe de la valeur nulle à la valeur *E*. Le circuit *RL* est alors soumis à un échelon de tension. Quand le circuit est fermé,



La loi des mailles s'écrit : $U_R + U_L = E$

Avec $\begin{cases} U_R = R.i \\ U_L = L.\frac{di}{dt} \end{cases}$

Donc l'équation différentielle

$$L.\frac{di}{dt} + R.i = E$$

Appliquons la méthode de résolution de l'équation différentielle donnée au paragraphe précédent

Solution de l'équation différentielle sans second membre : $i_{ssm} = Be^{-\frac{t}{\tau}}$

Solution particulière de l'équation différentielle complète : $i_p = \frac{E}{R}$

Solution générale de l'équation différentielle complète : $i = Be^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$

Pour déterminer la constante en écrivant la condition initiale imposée au circuit, à savoir la continuité de l'intensité du courant qui traverse la bobine :

$$i_{0^+} = i_{0^-} = 0 \ \Rightarrow B + \frac{E}{R} = 0 \ \Rightarrow \ B = -\frac{E}{R}$$

La solution de l'équation différentielle complète s'écrit :

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad avec \quad \tau = \frac{R}{L}$$

La tension à la borne de la bobine est :

$$U_L = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Le régime permanent continu étant atteint, la tension *e* passe instantanément de la valeur *E* à la valeur nulle quand on éteint la source ; le circuit est en régime libre. Soit la date t'=0 de l'extinction.

L'équation différentielle de l'intensité se réduit a :

$$\tau\frac{di}{dt} + i = 0$$

Dont la solution est :$i = \frac{E}{R}e^{\frac{-t}{\tau}}$ $la\ tension\ est\ U = L\frac{di}{dt} = -Ee^{\frac{-t}{\tau}}$

En régime permanent continu : $U_p = 0\ et\ I_p = 0$

- ✓ **Bilan énergétique**

Énergie stockée par la bobine pendant le régime transitoire s'écrit :

$$W_L = \frac{1}{2}Li^2$$

En régime permanent continu :

• la puissance reçue par la bobine est nulle : $P_L = U_L.I = 0$

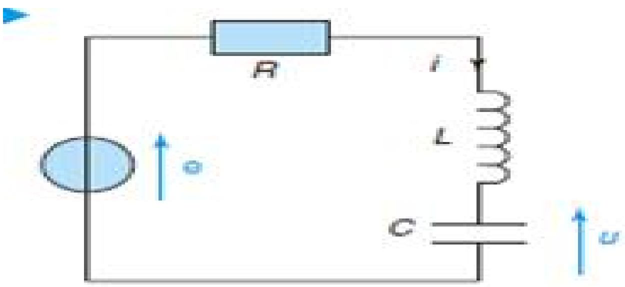
• la puissance fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans le résistor : $P = RI^2 = EI$

Toute l'énergie stockée par la bobine pendant le régime transitoire a été dissipée par effet Joule dans le résistor.

Circuits du 2nd ordre.

Circuit RLC série soumis à un échelon de tension :

❈ L'équation différentielle



A l'instant t=0 la tension e passe de la valeur nulle a la valeur E. le circuit RLC est soumis a un échelon de tension, quand le circuit est fermé

La loi des mailles s'écrit : $U_L + U_R + U_C = E$

Avec $\begin{cases} U_R = R.I_R \\ U_L = L\frac{di}{dt} \\ U_c = u \\ i = I_C = I_R = C.\frac{du}{dt} \end{cases}$ Donc $LC.\frac{d^2u}{dt^2} + RC.\frac{du}{dt} + u = E$

Finalement

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\sigma\omega_0.\frac{du}{dt} + \omega_0{}^2u = \omega_0{}^2E \quad ou \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}.\frac{du}{dt} + \omega_0{}^2u = \omega_0{}^2E$$

Avec

- Est la pulsation propre du circuit. Elle s'exprime en $rad.s^{-1}$
- Est la période propre du circuit RLC. Elle s'exprime en s.
- Est le coefficient d'amortissement du circuit RLC. C'est un

$$\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \\ \sigma = \dfrac{R}{2L\omega_0} \\ Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = \dfrac{1}{2\sigma} \end{cases}$$

❈ Résolution l'équation différentielle réduite

En posant $x = \omega_0 t$ il vient :

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = \omega_0 \frac{du}{dt} \text{ et } \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dt}(\omega_0 \frac{du}{dx}) = \omega_0{}^2 \frac{d^2u}{dx^2}$$

En posant aussi $y = \frac{u}{E}$, la réduction de l'équation différentielle conduit à :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\sigma\frac{dy}{dx} + y = 1$$

L'équation différentielle obtenue est une équation différentielle normalisée, x et y sont des variables sans dimension

- ✓ Résolution de l'équation différentielle sans seconde membre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\sigma\frac{dy}{dx} + y = 0$$

On a l'équation caractéristique de cette équation est : $r^2 + 2\sigma r + 1 = 0$

Avec le discriminant réduit de cette équation est : $\Delta = \sigma^2 - 1$

- ✓ Conditions initiales imposées au circuit

A la fermeture de l'interrupteur (date t=0^+) : La tension aux bornes du condensateur ne subit pas de discontinuité. S'il est initialement déchargé, alors: $u_{(0)} = 0 \quad d'ou: \quad y_{(0)} = 0$

L'intensité du courant qui traverse la bobine ne subit pas de discontinuité donc :

$$i_0 = C\left[\frac{du}{dt}\right]_{(0)} = 0 \Rightarrow \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(0)} = 0.$$

❈ **Si $\sigma > 1$ ($Q < \frac{1}{2}$) le discriminant est positif, le régime est apériodique**

Les solutions sont réelles $r_1 = -\sigma + \sqrt{\Delta}$ et $r_2 = -\sigma - \sqrt{\Delta}$
Donc la solution est $y_s = A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x}$

Et on a la solution particulière de l'équation différentielle complète :

$y_p = 1$

Donc la solution générale

$y = 1 + A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x}$

Et a partir les conditions initial on a

$$y_{(0)} = 1 + A_1 + A_2 = 0 \; ; \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(0)} = r_1 A_1 + r_2 A_2 = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{r_2}{r_1 - r_2} \; ; \; A_2 = -\frac{r_1}{r_1 - r_2}.$$

La solution génerale de l'equation s'écrit :

$$y = 1 - \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}}{2\sqrt{\sigma^2 - 1}} e^{\left(-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}\right)x} - \frac{-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}}{2\sqrt{\sigma^2 - 1}} e^{\left(-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}\right)x}$$

❈ **Si $\sigma < 1$ ($Q > \frac{1}{2}$) le discriminant est négatif ; le régime est pseudopériodique.**

Deux solutions r_1 et r_2 sont complexes.

Avec $r_1 = -\sigma + j\sqrt{-\Delta}$ et $r_2 = -\sigma - j\sqrt{-\Delta}$

donc la solution sans second membre

$y_{ssm} = e^{-\sigma x}\left[B_1 \cos\left(\sqrt{-\Delta}\; x\right) + B_2 \sin\left(\sqrt{-\Delta}\; x\right)\right]$ Avec B_1 et B_2 constantes

La solution particulaire $y_p = 1$

Donc la solution générale est

$y = 1 + e^{-\sigma x}\left[B_1 \cos\left(\sqrt{-\Delta}\ x\right) + B_2 \sin\left(\sqrt{-\Delta}\ x\right)\right]$ Ou $y = 1 + B' e^{-\sigma x} \cos\left(\sqrt{-\Delta}\ x + \varphi\right)$

A partir les conditions initial on trouve

$$B_1 = -1\ ;\quad B_2 = -\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}$$

Donc

$$y = 1 - e^{-\sigma x}\left[\cos\left(\sqrt{1-\sigma^2}\ x\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}\sin\left(\sqrt{1-\sigma^2}\ x\right)\right]$$

❋ **Si $\sigma = 1$, le discriminant est nul ; le régime est critique.**

alors $y_{ssm} = e^{-x}[C_1 x + C_2]$ avec C_1 et C_2 constantes réelles , la solution génerale est :

$$y = 1 + e^{-x}[C_1 x + C_2]$$

On détermine C_1 et C_2 a partir des conditions initiales : $C_1 = C_2 = -1$

La solution complete de l'équation différentille s'écrit :

$$y = 1 - e^{-x}[x + 1]$$

❋ **Evoluition de la tension et de l'intensité :**

Il suffit de remplacer,dans les equations precedantes ,x par $w_0 t$ et y par $\frac{U}{E}$.

❖ **Régime apériodique**

$$\frac{u}{E} = 1 + \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}}{2\sqrt{\sigma^2 - 1}} e^{\left(-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}\right)\omega_0 t} - \frac{-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}}{2\sqrt{\sigma^2 - 1}} e^{\left(-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}\right)\omega_0 t}$$

❖ **Régime pseudopériodique**

$$\frac{u}{E} = 1 - e^{-\sigma\omega_0 t}\left[\cos\left(\sqrt{1-\sigma^2}\ \omega_0 t\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}\sin\left(\sqrt{1-\sigma^2}\,\omega_0 t\right)\right]$$

❖ **Régime critique**

$y = 1 - e^{-w_0 t}[w_0 t + 1]$

❈ Resistance critique

La valeur $\sigma = 1$ correspond a la valeur critique R_c de R :

$$R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

-Le regime est aperiodique si $R > R_c$ (amortissement important)

-Le regime est pseudo-periodique si $R < R_c$ (faible amortissement)

-Le regime est critique si $R = R_c$ (amortissement critique, cas limite sans réalité physique).

❈ Durée du régime transitoire

• En régime apériodique, le terme $e^{(-\sigma+\sqrt{\sigma^2-1})\omega_0 t}$ dont la décroissance est la plus lente

donne la durée caractéristique du régime apériodique : $\tau = \frac{1}{(-\sigma+\sqrt{\sigma^2-1})\omega_0 t}$

En régime pseudo-périodique et en régime critique, c'est l'enveloppe exponentielle $e^{-\sigma\omega_0 t}$

qui donne la durée caractéristique du régime : $\tau = \frac{1}{\sigma\omega_0} = \frac{2Q}{\omega_0}$

Régime permanent continu

En régime permanent continu :

$U_{cp} = E$; $U_{Lp} = 0$; $I_p = 0$

❈ Bilan énergétique

• Énergie stockée par le condensateur pendant le régime transitoire :

$$w_c = \frac{1}{2}CU_p{}^2 - \frac{1}{2}C(U_{t=0})^2 = \frac{1}{2}CE^2$$

•Énergie stockée par la bobine pendant le régime transitoire :

$$W_L = \frac{1}{2}CI_p{}^2 - \frac{1}{2}Ci_{t=0}{}^2 = 0$$

• Énergie fournie par la source pendant le régime transitoire :

$$W_E = \int_0^\infty Ei\,dt = E\int_0^\infty i\,dt = EC\int_0^\infty du = CE^2$$

• Énergie dissipée par effet Joule dans le résistor pendant le régime transitoire :

$$W_R = W_E - W_c - W_L = \frac{1}{2}CE^2$$

En régime permanent continu, le courant est nul, donc la puissance reçue par le circuit

RLC est nulle.