Eléments de correction du problème de synthèse

ABCD est un trapèze rectangle tel que AB = 4, BC = 2 et AD = 6.
Le point mobile M décrit le segment [AB]. Soit AM = x.

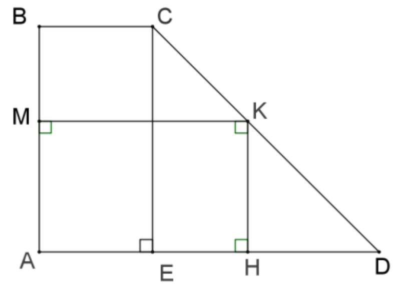
1. Précisons l'intervalle auquel appartient la variable x

   M appartient à [AB] avec AM = x et AB = 4 donc **x appartient à [0 ; 4]**

2. On note f(x) l'aire du rectangle AMKH (voir figure 1)

   Montrons que f(x) = $6x - x^2$

   f (x) est l'aire du rectangle AMKH donc f (x) = AM ×AH
   Or AM = x



   - *Pour calculer AH, cherchons DH* .
     Soit E est le projeté orthogonal de C sur (AD) (voir figure)

   - Première méthode :

     travaillons dans le triangle DCE :
     les points D, K et C sont alignés et distincts deux à deux
     les points D, H et E sont alignés et distincts deux à deux
     les droites (KH) et (CE) sont parallèles (car toutes deux perpendiculaires à (AD))
     d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{DK}{DC} = \frac{DH}{DE} = \frac{HK}{CE}$
     Or DE = AD – AE = AD – BC = 6 – 2 = 4 ; HK = AM = x et EC = AB = 4
     d' où $\frac{DH}{4} = \frac{x}{4}$. on en déduit que DH = x

   - Seconde méthode :

   - ✓ le triangle ECD est rectangle isocèle en E car (EC) est perpendiculaire à (AD) par construction et, de plus, EC = AB = 4 et ED = AD – AE = AD – BC = 6 – 2 = 4
   - ✓ Comme ECD est un triangle rectangle isocèle, on en déduit que $\widehat{CDE}$ = 45°
     Or $\widehat{CDE}$ = $\widehat{KDH}$ 45° et KHD est rectangle en H d'où KHD est un triangle rectangle isocèle en H et en particulier on a : HK = DH
     Comme HK = AM = x , on a DH = x

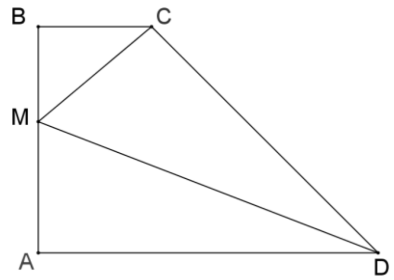
   - *Calcul de AH* : H appartient à [AD] donc AH = AD – DH = $6 - x$

   - *Calcul de f (x)* : f (x) = AM ×AH = $x \times (6 - x)$ = **$6x - x^2$**

3. On note g(x) l'aire du triangle CMD (voir figure 2)

   Montrons que g(x) = $12 - 2x$.

   On rappelle que l'aire d'un trapèze est égale à $\frac{h\,(b + B)}{2}$ où h est la hauteur relative aux bases, b est la longueur de la petite base et B celle de la grande base.



   g(x) l'aire du triangle CMD

   g (x) = Aire (ABCD) – Aire (BCM) – Aire (AMD)

   $$g(x) = \frac{AB \times (BC + AD)}{2} - \frac{BC \times BM}{2} - \frac{AM \times AD}{2}$$

   $$g(x) = \frac{4 \times (2 + 6)}{2} - \frac{2 \times (4 - x)}{2} - \frac{x \times 6}{2} = 16 - (4 - x) - 3x = 16 - 4 + x - 3x = \mathbf{12 - 2x}$$

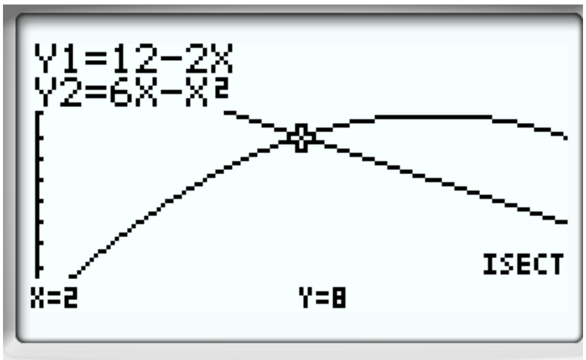
4. a) Conjecturer la position du point M pour que l'aire du triangle CDM soit supérieure ou égale à l'aire du rectangle AMKH (voir figure 3)

Ceci revient à résoudre l'inéquation $g(x) \geq f(x)$

$$12 - 2x \geq 6x - x^2 \quad \text{et} \quad x \in [0 ; 4]$$

En utilisant la calculatrice, on peut chercher les abscisses des points de C_g situés au-dessus ou sur C_f

Puis ZOOM AUTO



On peut remarquer que g est la restriction d'une fonction affine à [0 ;4] donc sa représentation graphique est un segment.

Il semble que x appartienne à [0 ; 2]

b) Montrer que pour tout x de ℝ, on a : l'égalité : $x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$

pour tout x de ℝ, on a : $(x - 2)(x - 6) = x^2 - 6x - 2x + 12 = x^2 - 8x + 12$

c) Prouver que la conjecture émise précédemment est exacte.

Ceci revient à résoudre l'équation $g(x) \geq f(x)$

$12 - 2x \geq 6x - x^2$ et $x \in [0 ; 4]$

$12 - 2x - 6x + x^2 \geq 0$ et $x \in [0 ; 4]$

$12 - 8x + x^2 \geq 0$ et $x \in [0 ; 4]$

Or $x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$

$(x - 2)(x - 6) \geq 0$ et $x \in [0 ; 4]$

- $x - 2 = 0$
  $x = 2$
  le coefficient directeur est égal à 1
  et $1 > 0$

- $x - 6 = 0$
  $x = 6$
  le coefficient directeur est égal à 1
  et $1 > 0$
  mais attention 6 n'appartient pas à [0 ; 4]

x	0		2		4
Signe de $x - 2$		–	0	+	
Signe de $x - 6$		+		+	
Signe de $(x - 2)(x - 6)$		–	0	+	

S = **[2 ; 4]**

Conclusion :

L'aire du triangle CDM est supérieure ou égale à l'aire du rectangle AMKH lorsque AM appartenant à [2 ; 4]