TES Spécialité Mathématiques	**Bac Blanc n°1 de Mathématiques**	**Vendredi 27 Janvier 2012**
Durée 3h	**Calculatrice autorisée - Aucun document n'est autorisé.**	

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.
Toute trace de recherche, même incomplète, sera valorisée si elle est juste…

Le barème est noté sur 20 points.

<u>Exercice 1</u>: Un jardin pédagogique (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Une grande ville a créé un jardin pédagogique de 5 000 m^2 sur le thème de l'écologie, jardin qui doit être visité par la suite par la majorité des classes de cette ville.

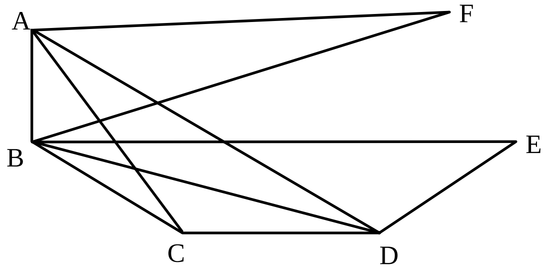
PREMIERE PARTIE

Ce jardin comporte six zones distinctes correspondant aux thèmes :

A. Eau
B. Économie d'énergies
C. Plantations et cultures locales
D. Développement durable
E. Biotechnologies
F. Contes d'ici (et d'ailleurs)

Ces zones sont reliées par des passages (portes) où sont proposés des questionnaires.

Le jardin et les portes sont représentés par le graphe ci-dessous (chaque porte et donc chaque questionnaire est représenté par une arête).



QUESTION PRELIMINAIRE :

Si un visiteur répond à tous les questionnaires, à combien de questionnaires aura-t-il répondu ?

D'après l'énoncé, chaque questionnaire est représenté par une arête or le nombre d'arêtes du graphe est 10.

1. Donner la matrice G associée à ce graphe.

Avec les sommets classés dans l'ordre alphabétique, la matrice G associée à ce graphe est

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Deux sommets quelconques de ce graphe peuvent-ils être reliés par une chaîne de longueur 2 ? Justifier.

$$G^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aucun des termes de la matrice G^2 n'est nul,
il existe donc au moins une chaîne de longueur 2 reliant deux sommets quelconques de ce graphe.

$\boxed{\text{Donc, le graphe est connexe.}}$

3. Peut-on parcourir le jardin en répondant à tous les questionnaires et sans repasser deux fois devant le même questionnaire :
   a) en commençant la visite par n'importe quelle zone ?

Parcourir le jardin en répondant à tous les questionnaires et sans repasser deux fois devant le même questionnaire revient à chercher une chaîne eulérienne.

Les degrés des différents sommets sont :

Sommets	A	B	C	D	E	F
Degré	4	5	3	4	2	2

Le graphe est connexe et a deux sommets de degré impair, alors d'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne.

Il est donc possible de parcourir le jardin en répondant à tous les questionnaires et sans repasser deux fois devant le même questionnaire

Il y a deux sommets de degré impair, donc il n'existe pas de cycle eulérien et les extremités de la chaîne sont les deux sommets de degré impair.

On ne peut pas commencer la visite par n'importe quelle zone.

b) en commençant la visite par la zone C (plantations et cultures) ? Dans ce cas, si la réponse est positive, quelle sera la dernière zone visitée.

Les extremités de la chaîne eulérienne sont les deux sommets de degré impair.

En commençant la visite par la zone C, la visite se terminera par la zone B.

DEUXIEME PARTIE

Une entreprise de services à la personne propose dans ses services l'entretien de jardins. Pour ce service, cette entreprise a recours à des employés à temps partiel pour une durée globale de x heures, et elle loue le matériel nécessaire pour une durée globale de y heures.

La surface de jardin traitée en une semaine, exprimée en centaines de m^2, est donnée par la fonction $f(x;y)=\sqrt{2xy}$ où x et y sont exprimés en heures. Les contraintes matérielles imposent que $0\leq x\leq 120$ et $0\leq y\leq 100$.

La figure donnée **en annexe 2** représente la surface S d'équation $z = f(x ; y)$.

1. Les points $A(20 ; 40 ; z_A)$ et $B(60 ; y_B ; 60)$ sont des points de la surface S. Déterminer pour chacun la coordonnée manquante.

Les points $A(20; 40; z_A)$ et $B(60; y_B; 60)$ sont des points de la surface S

alors leurs coordonnées vérifient l'équation de la surface

$$z_A = \sqrt{2\times 20\times 40} = 40$$

$$60 = \sqrt{2\times 60\times y_B} \Leftrightarrow y_B = \frac{60^2}{120} = 30$$

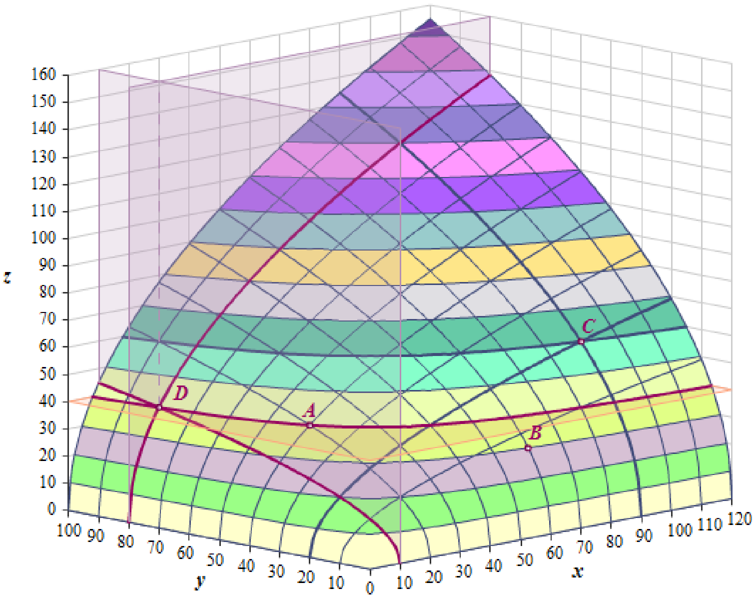
Les coordonnées des points A et B sont $A(20; 40; 40)$ et $B(60; 30; 60)$

2. Lire, sur la figure, les coordonnées du point C et en donner une interprétation correcte.

Les coordonnées du point C sont $C(90; 20; 60)$. C'est à dire qu'avec 90 heures de travail salarié et 20 heures de location de matériel la surface de jardin traitée est de 6000 m^2.

3. Placer, sur la figure, le point D de coordonnées (10 ; 80 ; 40).

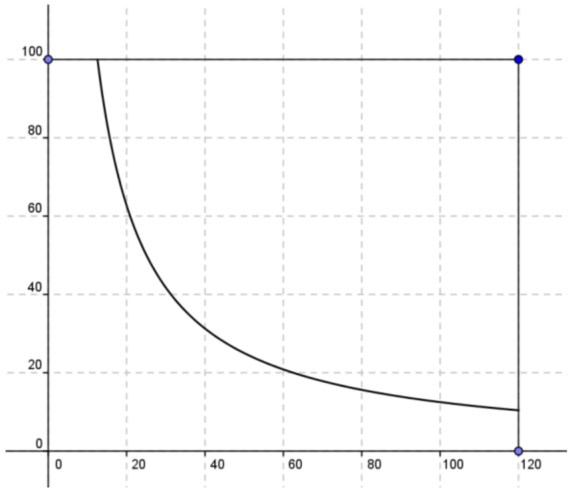
FIGURE 1



4. Donner la nature de la courbe de niveau z = 50.

$\begin{cases} z = \sqrt{2\,x\,y} \\ 0 \leq x \leq 120 \\ 0 \leq y \leq 100 \\ z = 50 \end{cases}$ $\begin{cases} 50 = \sqrt{2\,x\,y} \\ 0 \leq x \leq 120 \\ 0 \leq y \leq 100 \\ z = 50 \end{cases}$ $\begin{cases} 2500 = 2xy \\ 0 \leq x \leq 120 \\ 0 \leq y \leq 100 \\ z = 50 \end{cases}$

$\begin{cases} y = \dfrac{1250}{x} \\ 0 < x \leq 120 \\ 0 \leq y \leq 100 \\ z = 50 \end{cases}$



Dans le plan (xOy) la courbe de niveau de cote 50 est définie par : $y = \dfrac{1250}{x}$ avec $0 < x \leq 120$ et $0 \leq y \leq 100$

Il s'agit donc d'une portion d'hyperbole

5. Une heure de travail coûte 15 euros et une heure de location du matériel coûte 30 euros. On rappelle que l'aire du jardin pédagogique est de 5 000 m^2. En supposant que cette entreprise peut mettre à disposition globalement 20 h de travail par semaine, quel serait le coût total pour la ville ?

20 h de travail par semaine donc x = 20
L'aire du jardin pédagogique est de 5 000 m^2 donc z = 50 ce qui nous permet de dire que l'on est sur la courbe de niveau de cote 50.

D'après la question précédente, on a donc **$y = \dfrac{1250}{x}$ avec $0 < x \leq 120$ et $0 \leq y \leq 100$**

Or on a 20 h de travail par semaine donc x = 20.

On peut en déduire la valeur de y : $y = \dfrac{1250}{20} = 62{,}5$

De plus, une heure de travail coûte 15 euros et une heure de location du matériel coûte 30 euros, on peut calculer la dépense totale, en euros : $15x + 30y = 15 \times 20 + 30 \times 62{,}5 = 2175$

On en déduit que le coût total pour la ville sera de 2175 euros