Corrigé exo 3

1) a) $y' = \frac{y}{4}$. les soluθ sont les f$^\theta$ $g(t) = ke^{t/4}$

b) $g(0) = 1 \iff ke^{1/4 \times 0} = 1 \iff k = 1$.

donc $g(t) = e^{t/4}$.

2) a) h soluθ de (E_3) $\begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \\ h(0) = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -\frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{u} + \frac{1}{12} \\ \frac{1}{u(0)} = 1 \end{cases}$ $\left(h = \frac{1}{u} \text{ donc } h' = \frac{-u'}{u^2} \right.$

$\iff \begin{cases} -u' = -\frac{1}{4} \times \frac{u^{\cancel{2}}}{\cancel{u}} + \frac{u^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} u' = \frac{1}{4} u - \frac{u^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$

b) $y' = -\frac{1}{4} y + \frac{1}{12}$. les solu$\theta$ st les f^θ $h(t) = ke^{-t/4} - \frac{1/12}{-1/4}$

$h(t) = ke^{-t/4} + \frac{1}{3}$. or $(h)(0) = 1$ donc $ke^{(-1/4)\times 0} + \frac{1}{3} = 1$

$k = \frac{2}{3}$ donc $h(t) = \frac{2}{3} e^{-t/4} + \frac{1}{3}$.

$u(t) = \frac{1}{h(t)} = \frac{1}{\frac{2}{3}e^{-t/4} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2e^{-t/4} + 1}$.

c) $\lim_{t \to +\infty} 2e^{-t/4} + 1 = 1$

donc $\lim_{t \to +\infty} u(t) = 3$. Le nombre de rongeurs va tendre vers 300 lorsque $t \to +\infty$.