Corrigé exo 4

1) $f(x) = x(2-x)$ $\qquad f'(x) = 1(2-x) + x(-1) = 2-2x$

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2) a) Init $u_0 = a$ avec $a \in]0;1[$ donc $0 < u_0 < 1$

Hérédité Soit p un entier tq $0 < u_p < 1$.

$f \nearrow$ sur $[0;1]$ donc $f(0) < f(u_p) < f(1)$

$0 < u_{p+1} < 1$.

Conclusion : pR $\forall n$, $0 < u_n < 1$

b) $u_{n+1} - u_n = u_n(2-u_n) - u_n = 2u_n - u_n^2 - u_n$

$= -u_n^2 + u_n = u_n(1-u_n)$.

$u_n > 0$ et $1-u_n > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$

$u_{n+1} > u_n$ $\quad (u_n) \nearrow$.

c) $(u_n) \nearrow$ et majorée par 1 donc (u_n) CV.

3) a) $v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - u_n(2-u_n) = 1 - 2u_n + u_n^2$

$= (1-u_n)^2 = v_n^2$.

b) Conjecture $v_n = (v_0)^{2^n}$ avec $v_0 = 1 - u_0 = \frac{7}{8}$

Initialisat° : pR $n=0$ $\quad (v_0)^{2^0} = v_0^1 = v_0$.

Hérédité : Soit p un entier tq $v_p = (v_0)^{2^p}$.

$v_{p+1} = (v_p)^2 = ((v_0)^{2^p})^2 = v_0^{2^p \times 2} = v_0^{2^{p+1}}$.

Conclusion : pR $\forall n$, $v_n = v_0^{2^n} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

c) $0 < \frac{7}{8} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n} = 0$

$u_n = 1 - v_n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.