exo 2

1) a) $z_1 = \frac{1}{z}$.

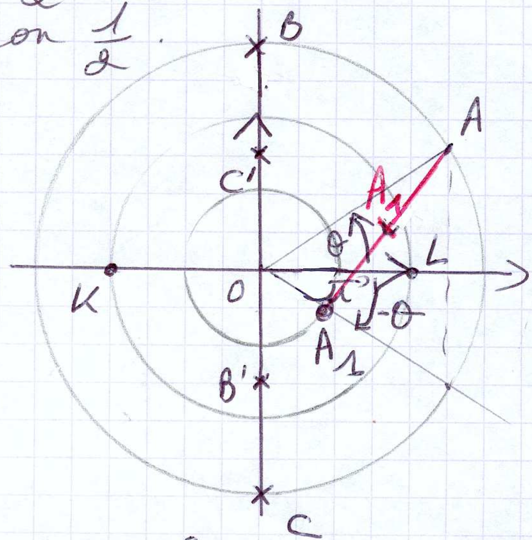
donc $OM_1 = |z_1| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{OM}$.

et $(\vec{u}; \vec{OM_1}) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) = -(\vec{u}; \vec{OM}) + 2k\pi$.

b) $OA = 2$ donc $OA_1 = \frac{1}{OA} = \frac{1}{2}$. donc A_1 app. au cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$.

$(\vec{u}; \vec{OA_1}) = -(\vec{u}; \vec{OA})$.

et A' milieu de $[AA_1]$.



2) a). M' milieu de $[MM_1]$

donc $z' = \frac{z_M + z_{M_1}}{2}$

$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

b) $z'_{B'} = \text{---} = \frac{3}{4}i$ et $z_{C'} = \text{---} = -\frac{3}{4}i$

3) $M' = M \iff z' = z \iff z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

$\iff 2z = z + \frac{1}{z}$

$\iff z = \frac{1}{z}$

$\iff z^2 = 1 \iff z = 1$ ou $z = -1$.

donc l'ens. des pts M tq $M' = M$ contient 2 points $K(-1)$ et $L(1)$

4) par le calcul.

M app. au cercle de centre O et de rayon 1 donc $z = e^{i\theta}$

$z' = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\theta + \cancel{i\sin\theta} + \cos\theta - \cancel{i\sin\theta}\right)$

$= \cos\theta$ or $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

donc $M'(z')$ décrit $[KL]$.

Géométriquement

Si M app. au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, $OM = 1$

donc $OM_1 = \frac{1}{OM} = 1$ donc $M_1 \in \mathcal{C}$.

comme $(\vec{u}; \vec{OM_1}) = -(\vec{u}; \vec{OM})$.

M et M_1 app. au m̅ cercle $\mathcal{C}$ et sont sym. par rapport à l'axe des abscisses donc (KL) médiatrice de $[MM_1]$ et le milieu M' de $[MM_1]$ décrit $[KL]$.