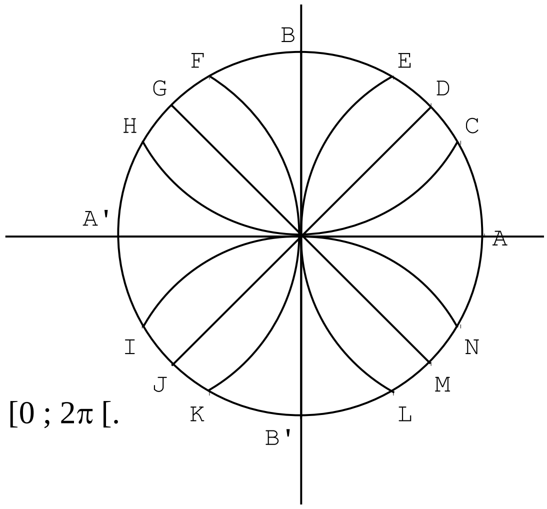
Exercice n°1 : sur poly

On considère le cercle trigonométrique ci-contre.



1) Pour chaque valeur de *x*, donner le point qui lui est associé par enroulement.

x	π	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{7\pi}{6}$
Point associé	**A'**	**G**	**L**	**K**	**B'**	**H**

2) Pour chaque point, donner la valeur de *x* qui lui est associé dans $[0 ; 2\pi[$.

Point M	B'	F	K	H	N
Valeur de x dans $[0 ; 2\pi[$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{4\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{5\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{11\pi}{6}}$

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 12x + 1$.

1) Déterminer l'image de $2 + \sqrt{3}$.

$$\mathbf{f(2+\sqrt{3})} = 4(2+\sqrt{3})^2 + 12(2+\sqrt{3}) + 1$$
$$= 4(4 + 4\sqrt{3} + 3) + 24 + 12\sqrt{3} + 1$$
$$= 16 + 16\sqrt{3} + 12 + 24 + 12\sqrt{3} + 1$$
$$= \mathbf{53 + 28\sqrt{3}}$$

2) Déterminer, s'ils existent, les antécédents de – 9.

On doit résoudre $f(x) = -9$, c'est-à-dire $4x^2 + 12x + 1 = -9$

d'où $4x^2 + 12x + 10 = 0$

$\Delta = 12^2 - 4 \times 4 \times 10 = 144 - 160 = -16$ $\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution réelle.

On en conclut que – 9 n'a pas d'antécédent par f.

3) a) Résoudre l'inéquation $f(x) > 20x - 3$

$$4x^2 + 12x + 1 > 20x - 3$$
$$4x^2 + 12x + 1 - 20x + 3 > 0$$
$$4x^2 - 8x + 4 > 0$$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 4 = 64 - 64 = 0$

$\Delta = 0$ donc le polynôme a une unique racine réelle : $x_0 = \frac{-(-8)}{2 \times 4} = 1$

De plus a > 0 (a = 4), donc la parabole a ses branches dirigées vers le haut, donc le polynôme est strictement positif sur $\mathbb{R} - \{1\}$, et s'annule pour $x = 1$, d'où :

$$\mathbf{S =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[}$$

b) Quelle interprétation graphique peut-on donner de cette inéquation ?

- $f(x) > 20x - 3$ pour tout $x \neq 1$, donc **la courbe de f est strictement au dessus de la droite d'équation $y = 20x - 3$ sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.**
- $f(x) = 20x - 3$ pour $x = 1$, donc **la courbe de f et la droite d'équation $y = 20x - 3$ se coupent au point d'abscisse 1.**

On peut en déduire que **la droite est tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.**

Exercice n°3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2x^2 - 12x + 10}{4x + 3} < 0$

Le quotient est défini pour tout x tel que : $4x + 3 \neq 0$, soit pour $x \neq -\dfrac{3}{4}$.

On étudie le signe de $2x^2 - 12x + 10$.

$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 10 = 144 - 80 = 64$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions réelles :

$x_1 = \dfrac{-(-12) - \sqrt{64}}{2 \times 2} = \dfrac{12 - 8}{4} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-(-12) + \sqrt{64}}{2 \times 2} = \dfrac{12 + 8}{4} = 5$

De plus a > 0 (a = 2), donc la parabole a ses branches dirigées vers le haut.

On en déduit le signe du polynôme, puis le tableau de signe du quotient.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		1		5		$+\infty$
Signe de $2x^2 - 12x + 10$		$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de $4x + 3$		$-$	‖	$+$		$+$		$+$	
Signe du quotient $\dfrac{2x^2 - 12x + 10}{4x + 3}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

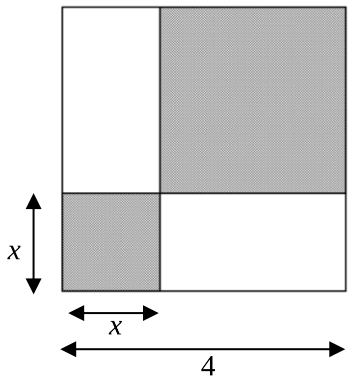
D'où S = = $]-\infty\,;\,-\frac{3}{4}[\ \cup\ ]1\,;\,5[$

Exercice n°4 :

L'unité de longueur est le centimètre.

On dispose d'un carré de côté 4, découpé en 4 rectangles comme indiqué sur la figure ci-contre.

On note f (x) l'aire du domaine hachuré.



(figure réduite)

1) A quel intervalle appartient x ?

   x est une distance donc un réel positif.

   De plus le côté du carré est égal à 4, donc $x \leq 4$

   Donc x appartient à [0;4].

2) Montrer que f $(x) = 2x^2 - 8x + 16$

   f (x) est l'aire du domaine hachuré,

   donc la somme des aires des deux carés de côté respectif : x et $4 - x$,

   soit f $(x) = x^2 + (4 - x)^2$

   f $(x) = x^2 + 16 - 8x + x^2 =$ <u>**$2x^2 - 8x + 16$**</u>

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f en le justifiant.

$f(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$ ($a = 2$)

donc C_f est une portion d'une parabole "tournée vers le haut "

dont le sommet S a pour coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2a}\,;\,f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$

$x_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-8}{2 \times 2} = 2$ et $y_S = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = f(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 16 = 8 - 16 + 16 = 8$

x	0	2	4
Variations de f	16 ↘	8	↗ 16

4) **BONUS :** Déterminer si l'on peut trouver x tel que l'aire hachurée soit égale à 6 cm^2.

On cherche s'il existe x tel que $f(x) = 6$

$2x^2 - 8x + 16 = 6$ et $x \in [0\,;\,4]$

$2x^2 - 8x + 10 = 0$ et $x \in [0\,;\,4]$

$\Delta = (-8)^2 - 4(2)(10) = 64 - 80 = -16$ donc $\Delta < 0$ d'où pas de solution réelle

Il n'existe aucune valeur de x pour laquelle l'aire hachurée soit égale à 6 cm^2

Plus rapidement, il suffisait d'utiliser la question précédente et de remarquer que le minimum de f est 8 donc il est impossible que $f(x)$ prenne la valeur 6