Ch S1 : Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique
Exercices d'application corrigés

page 25 n° 48 b)

$S = 1 + 0,5 + 0,5^2 + \dots\dots + 0,5^{15}$
$S = 1 + b + b^2 + \dots\dots + b^{15}$ avec $b = 0,5$
$b \neq 1$ donc $S = \dfrac{1 - b^{15+1}}{1 - b} = \dfrac{1 - 0,5^{15+1}}{1 - 0,5} = \dfrac{1 - 0,5^{16}}{0,5} = \boxed{2\,(1 - 0,5^{16})} \approx 1,9999695$

page 25 n° 49 b)

$S = 0,8 + 0,8 \times 1,3 + 0,8 \times 1,3^2 + \dots\dots + 0,8 \times 1,3^{15}$

Première méthode :

$S = 0,8\,(1 + 1,3 + 1,3^2 + \dots\dots + 1,3^{15})$
$S = 0,8\,(1 + b + b^2 + \dots\dots + b^{15})$ avec $b = 1,3$
$b \neq 1$ donc $S = 0,8 \times \dfrac{1 - b^{15+1}}{1 - b} = 0,8 \times \dfrac{1 - 1,3^{15+1}}{1 - 1,3} = 0,8 \times \dfrac{1 - 1,3^{16}}{-0,3} = \boxed{-\dfrac{8}{3}\,(1 - 1,3^{16})} \approx -174,77776$

Seconde méthode:

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 1,3 et de premier terme $u_0 = 0,8$
$S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{15}$
Comme la raison de cette suite est différente de 1, on a
$S = u_0 \times \dfrac{1 - 1,3^{15+1}}{1 - 1,3} = 0,8 \times \dfrac{1 - 1,3^{16}}{-0,3} = -\dfrac{8}{3}\,(1 - 1,3^{16}) \approx -174,77776$

page 25 n° 49 c)

$S = 4 + \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3^2} + \dots\dots + \dfrac{4}{3^{10}}$

Première méthode : (plus simple dans un tel cas pour trouver la raison de la suite , …)

$S = 4\,(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dots\dots + \dfrac{1}{3^{10}})$
$S = 4\,(1 + \dfrac{1}{3} + (\dfrac{1}{3})^2 + \dots\dots + (\dfrac{1}{3})^{10})$

$S = 4\,(1 + b + b^2 + \dots\dots + b^{10})$ avec $b = \dfrac{1}{3}$

$b \neq 1$

donc $S = 4 \times \dfrac{1 - b^{10+1}}{1 - b} = 4 \times \dfrac{1 - (\frac{1}{3})^{11}}{1 - \frac{1}{3}} = 4 \times \dfrac{1 - \frac{1}{3^{11}}}{\frac{2}{3}} = 4 \times \dfrac{3}{2}\,(1 - \dfrac{1}{3^{11}}) = 6\,(1 - \dfrac{1}{3^{11}})$

$S = 6\,(1 - \dfrac{1}{177147}) = 6\,(\dfrac{177147 - 1}{177147}) = 6 \times \dfrac{177146}{177147} = \boxed{\dfrac{354298}{59049}}$

Seconde méthode:

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 4$
$S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{15}$
Comme la raison de cette suite est différente de 1, on a

$$S = u_0 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1-\frac{1}{3}} = 4 \times \frac{1-\frac{1}{3^{11}}}{\frac{2}{3}} = 4 \times \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{11}}\right) = 6\left(1-\frac{1}{3^{11}}\right)$$

page 25 n° 51

- Soit u_0 le salaire en euros de cet employé, perçu le 1[er] Janvier : $u_0 = 1200$
  u_n le salaire en euros de cet employé, perçu le 1[er] du nème mois après Janvier
  Or chaque mois, ce salaire est augmenté de 0,8% par rapport au moins précédent
  donc $u_{n+1} = \left(1+\frac{0,8}{100}\right)u_n$
  On en déduit que (u_n) est une suite géométrique de raison 1,008. De plus son premier terme est $u_0 = 1200$ donc $u_n = 1200 \times 1,008^n$

  Le salaire annuel de cet employé est égal à :
  $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{11}$
  $S = 1200 + 1200\times 1,008 + 1200\times 1,008^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1200\times 1,008^{11}$
  $S = 1200\,(1 + 1,008 + 1,008^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1,008^{11})$

  Comme 1,008 est différent de 1, on a
  $$S = 1200 \times \frac{1-1,008^{12}}{1-1,008} = 1200 \times \frac{1-1,008^{12}}{-0,008} = -150\,000\,(1-1,008^{12}) = 150\,000\,(1,008^{12}-1)$$

  $S \approx 15050,80$

Le salaire annuel de cet employé est donc d'environ 15051 €

Livre p 32 n° 89

a) Chaque semaine , la cadence augmente de 8% donc $u_{n+1} = \left(1+\frac{8}{100}\right)u_n = 1,08\ u_n$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } 1,08}$.
De plus son premier terme est : $u_0 = 5\ 000$

b) D'après ce qui précède, on peut écrire que $u_n = 5\ 000 \times 1,08^n$

On veut déterminer la semaine à partir de laquelle la production hebdomadaire dépassera 10 000 flacons.
On cherche donc la plus petite valeur de n telle que $u_n > 10\ 000$

$5\ 000 \times 1,08^n > 10\ 000$

Première méthode

1,08 > 1 donc la suite ($1,08^n$) est strictement croissante.
En multipliant par 5000 qui est strictement positif, on en déduit que la suite (u_n) est aussi strictement croissante
De plus, avec le mode table de la calculatrice ,en prenant dans SET : start : 0 ; End : 20 ; Step : 1
on obtient alors $u_9 \approx 9995$ et $u_{10} \approx 10795$
$u_9 < 10\ 000$ et $u_{10} > 10\ 000$

$\boxed{\text{On en déduit que le plus petit entier tel que } u_n > 10\ 000 \text{ est égal à } 10}$

Seconde méthode

$5\ 000 \times 1,08^n > 10\ 000$

$1,08^n > \frac{10\ 000}{5\ 000}$

$1,08^n > 2$

1,08 > 1 donc la suite ($1,08^n$) est strictement croissante.
De plus, avec le mode table de la calculatrice ,en prenant dans SET : start : 0 ; End : 20 ; Step : 1
on obtient alors $1,08^9 \approx 1,999005$ et $1,08^{10} \approx 2,15892$
$1,08^9 < 2$ et $1,08^{10} > 2$
On en déduit que le plus petit entier tel que $1,08^n > 2$ est égal à 10
et donc le plus petit entier tel que $u_n > 10\ 000$ est égal à 10

Troisième méthode :

On peut reprendre l'algorithme du seuil (cf DNS 4) en le modifiant

Variables : *n* est un entier naturel
u est un réel

Initialisation: *u* prend la valeur ~~2678~~ **5000**

n prend la valeur 0

Traitement : Tant que *u* < ~~6 000~~ 10 000
u prend la valeur *u*× ~~1,075~~ 1,08
n prend la valeur *n* + 1
Fin de Tant que

Sortie : Afficher *n*

Le voici sur une calculatrice

Pour une calculatrice T.I	Pour une calculatrice Casio
: 0 →N : 5000 → U : WHILE (U< 10 000) : U× 1,08→ U : N+1 → N End Disp N	0 → N 5000 → U WHILE U < 10000 U× 1,08→ U N+1 → N Whileend N◢

c) Calculons le nombre de flacons durant 10 semaines après la demande de l'état

Il s'agit de calculer :
$S = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{10}$

Première méthode :

$S = 5000 \times 1{,}08 + 5000 \times 1{,}08^2 + \ldots\ldots + 5000 \times 1{,}08^{10}$
$S = 5000 \times 1{,}08 \,(1 + 1{,}08 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1{,}08^9)$
1, 08 différent de 1 donc
$S = 5000 \times 1{,}08 \times \dfrac{1 - 1{,}08^{9+1}}{1 - 1{,}08} = 5000 \times 1{,}08 \times \dfrac{1 - 1{,}08^{10}}{-0{,}08} = - \;67500 \,(1 - 1{,}08^{10})$
$S = \;67500 \,(- 1 + 1{,}08^{10}) \approx 78\,227{,}44$

Seconde méthode

$S = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{10}$

S est la somme de 10 termes consécutifs de la suite (u_n) géométrique de raison 1,08 différente de 1
donc $S = u_1 \dfrac{1 - 1{,}08^{10}}{1 - 1{,}08} = 5000 \times 1{,}08 \,\dfrac{1 - 1{,}08^{10}}{-0{,}08} = - \;67500 \,(1 - 1{,}08^{10})$
$S = \;67500 \,(- 1 + 1{,}08^{10}) \approx 78\,227{,}44$

Le nombre de flacons fabriqués durant ces 10 semaines est d'environ 78227

	Chiffre d'affaire en période normale	Chiffre d'affaire en période de crise
La dixième semaine	5000 flacons vendus à 3,5 € le flacon soit un total de recettes de 5000× 3,5 = 17 500 Recette totale la dixième semaine est de 17 500 €	La dixième semaine on a fabriqué u_{10} flacons Or $u_{10} = 5000 \times 1{,}08^{10} \approx$ 10 794,6 ≈ 10794 Chaque flacon est vendu au prix de 1,50€ d'où un total de : 10794× 1,5 = 16 191 Recette totale la dixième semaine est de 16 191 €
Au bout de 10 semaines	5000 flacons chaque semaine donc 50 000 pour les 10 semaines soit un total de recettes de 50000× 3,5 = 175 000 Recette totale sur les 10 semaines est de 175 000 €	D'après la question précédente, le nombre de flacons fabriqués durant ces 10 semaines est de 78227 Chaque flacon est vendu au prix de 1,50€ d'où un total de : 78227 × 1,5 = 117 340,5 Recette totale sur les 10 semaines est de 117 340,5 €

L'entreprise n'a donc pas bénéficié de la crise !