Exercice n°1 (2,5 points)

Une tombola propose 100 billets dont 30 sont gagnants : il y a 1 lot de 250 euros, 4 lots de 50 euros et 25 lots de 2 euros. Un billet est vendu 5 euros. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique lié à l'achat d'un billet de tombola.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

   $\mathbf{X \in \{245\ ;\ 45\ ;\ -3\ ;\ -5\}}$

2. Donner la loi de probabilité de X.

x_i	**245**	**45**	**–3**	**–5**
$p(X = x_i)$	**0,01**	**0,04**	**0,25**	**0,7**

3. Calculer E(X) et interpréter ce nombre.

   $E(X) = 245 \times 0{,}01 + 45 \times 0{,}04 - 3 \times 0{,}25 - 5 \times 0{,}7 = 0$

   E(X) = 0 signifie que cette tombola est "équitable" : elle n'a pas été conçue pour gagner de l'argent.

Exercice n°2 (3 points)

On donne ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	– 2	– 1	1	2	a
$p(X = x_i)$	0,1	0,25	0,4	0,2	b

1. Déterminer b.

$$\sum_{i=1}^{5} p(X = x_i) = 1 \iff b = 1 - (0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}4 + 0{,}2) = 1 - 0{,}95 \iff \mathbf{b = 0{,}05}$$

2. Déterminer a sachant que l'espérance mathématique de X vaut 0,5.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i \times p(X = x_i) = 0{,}5 \iff -2 \times 0{,}1 - 1 \times 0{,}25 + 1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}2 + 0{,}05a = 0{,}5$$
$$\iff 0{,}05a = 0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}25 - 0{,}4 - 0{,}4$$
$$\iff a = \frac{0{,}15}{0{,}05}$$
$$\iff \mathbf{a = 3}$$

3. Calculer alors $\sigma(X)$, vous donnerez la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 10^{-3} près.

$$V(X) = \sum_{i=1}^{5} (x_i^2 \times p(X = x_i)) - (E(X))^2$$
$$V(X) = (-2)^2 \times 0{,}1 + (-1)^2 \times 0{,}25 + 1^2 \times 0{,}4 + 2^2 \times 0{,}2 + 3^2 \times 0{,}05 - 0{,}5^2$$
$$V(X) = 2{,}05$$

ou $V(X) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - E(X))^2 \times p(X = x_i)$

$$V(X) = (-2 - 0{,}5)^2 \times 0{,}1 + (-1 - 0{,}5)^2 \times 0{,}25 + (1 - 0{,}5)^2 \times 0{,}4 + (2 - 0{,}5)^2 \times 0{,}2 + (3 - 0{,}5)^2 \times 0{,}05$$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ d'où $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{2{,}05} \approx 1{,}432}$

Exercice n°3 (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $|x-4| = 7$ Il faut distinguer 2 cas :
- si $x \geq 4$, $x-4 \geq 0$ donc $|x-4| = x-4 = 7$ d'où $x = 11$
- si $x < 4$, $x-4 < 0$ donc $|x-4| = -x+4 = 7$ d'où $x = -3$

Donc **S = {–3 ; 11}**

2) $|x-1| > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 > 4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x < 1 \\ -x+1 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x < 1 \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5$ ou $x < -3$

Donc $\mathbf{S = \,]-\infty\,;-3[\, \cup \,]5\,;+\infty[}$

3) $5|x+4| - 10 \leq 0 \Leftrightarrow 5|x+4| \leq 10 \Leftrightarrow |x+4| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x+4 \leq 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x < -4 \\ -x-4 \leq 2 \end{cases}$

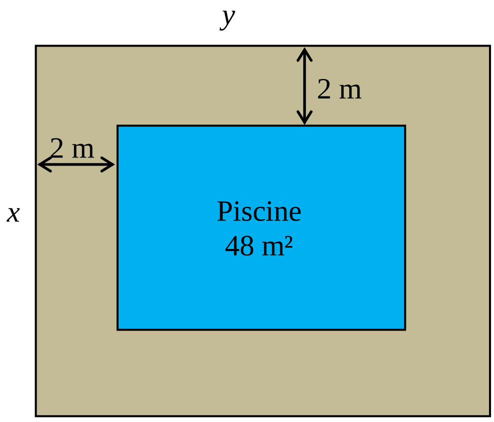
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x < -4 \\ x \geq -6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in [-4\,;-2] \cup [-6\,;-4[$

Donc $\mathbf{S = [-6\,;-2]}$

Exercice n°4 (4,5 points)

Une terrasse de périmètre extérieur de 44 m contient une piscine. L'aire de la piscine est 48 m².
La terrasse qui entoure la piscine a une largeur de 2 m.
Quelles sont les dimensions de la terrasse ?



Soient x et y les dimensions de la terrasse.

Le périmètre extérieur de la terrasse est de 44 m : $2(x+y) = 44$

La terrasse qui entoure la piscine a une largeur de 2 m,

donc la piscine a pour dimensions : $x-4$ et $y-4$

L'aire de la piscine est 48 m² : $(x-4)(y-4) = 48$

Les dimensions x et y de la terrasse vérifient donc le système :

$$\begin{cases} 2(x+y) = 44 \\ (x-4)(y-4) = 48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 22-x \\ (x-4)(22-x-4) = 48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 22-x \\ (x-4)(18-x) = 48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 22-x \\ -x^2+22x-72 = 48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 22-x \\ -x^2+22x-120 = 0 \end{cases}$$

On résout l'équation : $-x^2+22x-120 = 0$

$\Delta = 4$ $\Delta > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-22-2}{-2} = 12$ et $x_2 = \dfrac{-22+2}{-2} = 10$

$y = 22-x$ donc $y_1 = 22-12 = 10$ et $y_2 = 22-10 = 12$

La terrasse fait donc 10 m de largeur et 12 m de longueur.

<u>Exercice n°5</u> (4 points)

Un phare breton émet un signal jaune toutes les 15 minutes et un signal rouge toutes les 27 minutes.
On aperçoit le signal jaune à 0 h 02 min et le signal rouge à 0 h 08 min.
A quelle heure verra-t-on pour la première fois les deux signaux émis en même temps ?

(On pourra noter N le nombre de signaux jaunes et P le nombre de signaux rouges émis jusqu'à la prochaine émission simultanée et montrer que 5N – 9P = 2)

Soit N le nombre de signaux jaunes et P le nombre de signaux rouges émis jusqu'à la prochaine émission simultanée. La durée en minutes entre deux émissions du signal jaune est 15 minutes, donc pour N signaux, la durée est de 15 N min. Pour le signal rouge, pour P signaux il y aura 27 P min.

Le signal jaune a été émis 6 min avant le signal rouge, donc les durées en minutes entre 0 h 08 min et la prochaine émission simultanée du signal jaune et du signal rouge sont respectivement 15 N – 6 et 27 P.

Donc : $15\,N - 6 = 27\,P$

$15\,N - 27\,P = 6$

d'où, en divisant les deux membres par 3 : $5\,N - 9\,P = 2$

On cherche deux entiers positifs, N et P, tels que :

$5\,N - 2 = 9\,P$, avec N et P les plus petits possibles, donc tels que : $P = \dfrac{5N}{9} - \dfrac{2}{9}$

A l'aide de la calculatrice, on conjecture graphiquement que N = 4 et P = 2, en traçant la droite d'équation :$P = \dfrac{5N}{9} - \dfrac{2}{9}$

On devra donc attendre $2 \times 27 = 54$ min (ou $4 \times 15 - 6 = 54$)

Par conséquent on verra les deux signaux simultanés à 1h 02 min.

<u>Exercice n°6</u> (3 points)

v est une fonction définie sur l'intervalle [– 3 ; 2].
Voici son tableau de variation.

x	-3		-1		0		2
Variations de v	-1	↗	0	↗	5	↘	3

1. a) Sur quel intervalle I, la fonction $f : x \mapsto \sqrt{v(x)}$ est-elle définie ?

   La fonction $f = \sqrt{v}$ est définie si et seulement si $v(x) \geq 0$, donc ***f* est définie sur I = [– 1 ; 2]**

   b) Dresser le tableau de variation de *f* sur I.

x	-1		0		2
Variations de *f*	0	↗	$\sqrt{5}$	↘	$\sqrt{3}$

2. a) Sur quel ensemble D, la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$ est-elle définie ?

   La fonction $g = \dfrac{1}{v}$ est définie si et seulement si $v(x) \neq 0$,

   donc ***g* est définie sur D = [–3 ; –1[∪]–1 ; 2]**

   b) Dresser le tableau de variation de *g* sur D.

x	-3		-1		0		2
Variations de *g*	-1	↘	‖	↘	$\dfrac{1}{5}$	↗	$\dfrac{1}{3}$