1S **Eléments de correction du DNS 13** **à rendre le 12/03/13**

Exercice 66 p 97

66 Une entreprise décide de fabriquer et de commercialiser un produit. Sa capacité maximale de production est de 20 tonnes. Le coût, en milliers d'euros, d'une production de x tonnes est donné par la relation $C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x$.

1. Étudier les variations de C sur [0 ; 20].

Le coût est croissant sur [0 ; 20].

Tracer la représentation graphique de C dans un repère orthogonal (unités : 1 cm sur l'axe des abscisses pour 1 unité ; 1 cm sur l'axe des ordonnées pour 200 euros).

2. En économie, on appelle coût moyen, noté C_M, le coût de fabrication d'une tonne de produit lorsque x tonnes sont produites.

Donc $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

a. Déterminer et étudier le sens de variation de la fonction C_M sur l'intervalle [0 ; 20].

La fonction C_M est décroissante sur [0 ; 15] et croissante sur [15 ; 20].

b. En déduire le coût moyen minimal.

Le coût moyen minimal est atteint pour $x = 15$ et égal à 75 milliers d'euros.

3. Après une étude de marché, l'entreprise décide de vendre son produit 84 000 euros la tonne. Le bénéfice réalisé par l'entreprise est donc défini par la fonction B telle que $B(x) = 84x - C(x)$.

a. Quelle doit être la production x de l'entreprise pour qu'elle réalise un bénéfice maximal ?

$B(x) = -x^3 + 30x^2 - 216x$.

$B'(x) = -3x^2 + 60x - 216$

$\Delta = 1008 = 144 \times 7$, $\Delta > 0$ donc $B'(x)$ a 2 racines :

$$x_1 = \frac{-60 - 12\sqrt{7}}{-6} = 10 + 2\sqrt{7} \approx 15{,}292$$

$$x_2 = \frac{-60 + 12\sqrt{7}}{-6} = 10 - 2\sqrt{7} \approx 4{,}708$$

De plus a < 0, donc $B'(x)$ est positif entre les racines, et négatif à l'extérieur.
On en déduit que la fonction B est

- décroissante sur $[0 ; 10 - 2\sqrt{7}]$,
- croissante sur $[10 - 2\sqrt{7} ; 10 + 2\sqrt{7}]$,
- et décroissante sur $[10 + 2\sqrt{7} ; 20]$.

$B(0) = 0$, $B(20) = -320$, $B(10 - 2\sqrt{7}) \approx -456{,}324$ et $B(10 + 2\sqrt{7}) \approx 136{,}324$

Lorsque la production de l'entreprise est environ égale à 15,292 tonnes, le bénéfice est maximal.

b. Est-ce la même valeur qui minimise le coût moyen ?

Non.

Exercice 166 p 158

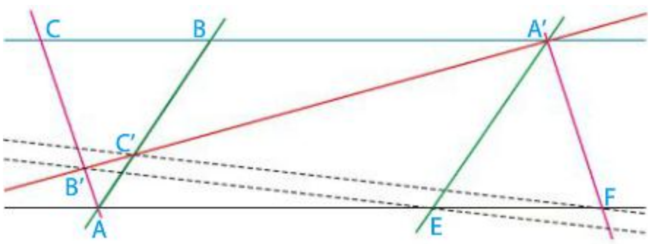
Soit A, B et C trois points non alignés. B′ et C′ sont définis par :

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

La droite (B′C′) coupe (BC) en A′.

La droite Δ_1 est la parallèle à (AB) passant par A′, Δ_2 est la parallèle à (AC) passant par A′ et Δ_3 est la parallèle à (BC) passant par A.

Le point E est l'intersection de Δ_1 et Δ_3, F est l'intersection de Δ_2 et Δ_3.



On cherche à démontrer que les droites (B′E) et (C′F) sont parallèles.

On se place dans le repère (A ; B, C).

1. Donner dans ce repère, les coordonnées de A, B, C, B′ et C′.

A(0 ; 0) ; B(–1 ; 0) ; C(0 ; 1) ; B′$(0 ; \frac{1}{4})$; C′$(\frac{1}{3} ; 0)$.

2. a. Justifier que la droite (B′C′) a pour équation $3x + 4y - 1 = 0$.

Les coordonnées de B′ et C′ vérifient l'équation donnée.

b. Déterminer une équation de la droite (BC).

(BC) : $x + y - 1 = 0$.

c. En déduire les coordonnées du point A′.

A′(3 ; –2).

3. a. Déterminer une équation de chacune des droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

$\Delta_1 : y + 2 = 0$; $\Delta_2 : x - 3 = 0$; $\Delta_3 : x + y = 0$.

b. En déduire les coordonnées de E et F.

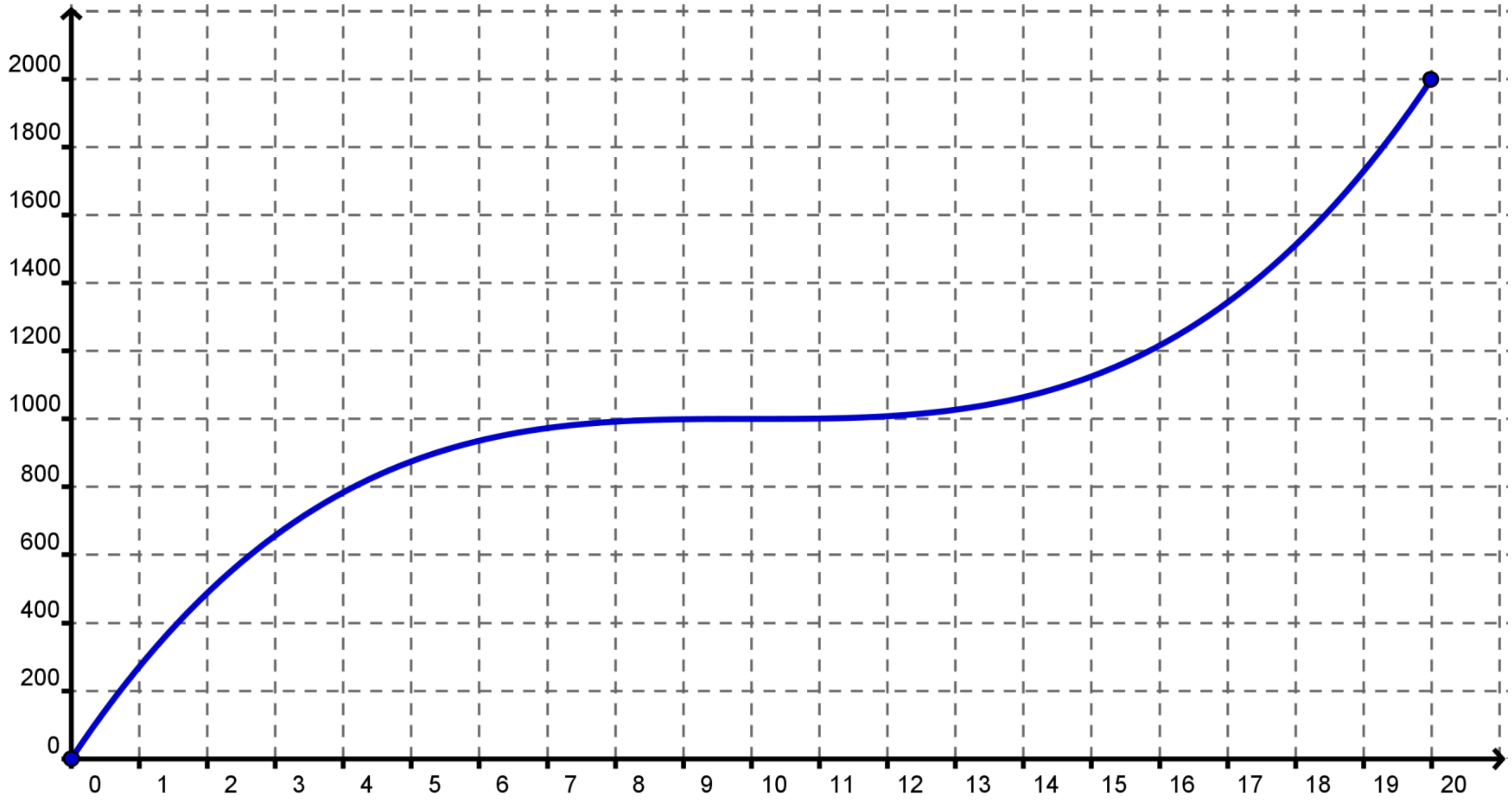
E(2 ; –2) et F(3 ; –3).

4. Conclure.

$\overrightarrow{B'E}\,(2 ; -\frac{9}{4})$ et $\overrightarrow{C'F}\,(\frac{8}{3} ; -3)$.

$$2 \times (-3) - \frac{8}{3} \times \left(-\frac{9}{4}\right) = -6 + 6 = 0$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{B'E}$ et $\overrightarrow{C'F}$ sont colinéaires, et les droites (B′E) et (C′F) sont parallèles.



2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20