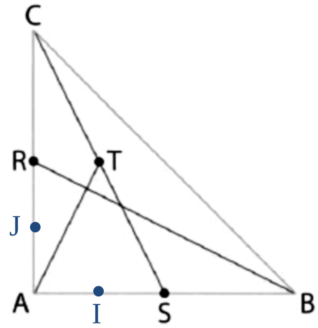
1S	Corrigé du DS n°5 de mathématiques

Le barème est donné à titre indicatif sur 25 points.

Exercice n°1 (7 points)

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A, avec AB = 4,
R le milieu de [AC], S celui de [AB] et T celui de [CS].

On considère les points I de [AB] et J de [AC] tels que AI = AJ = 1.



1. a) Justifier que (A ; I, J) est un repère orthonormé.

   ABC un triangle rectangle isocèle en A, I est sur [AB] et J est sur [AC], donc (AI) et (AJ) sont perpendiculaires.

   De plus, AI = AJ = 1 donc **(A ; I, J) est un repère orthonormé.**

   b) Donner, sans justifier, les coordonnées de A, B, C, R et S dans ce repère.

   A(0 ; 0) ; B(4 ; 0) ; C(0 ; 4) ; R(0 ; 2) ; S(2 ; 0).

   c) Calculer les coordonnées de T.

   T est le milieu de [CS], donc $T\left(\frac{0+2}{2};\frac{4+0}{2}\right)$ **T(1 ; 2)**

2. Démontrer, à l'aide d'un produit scalaire, que la médiane (AT) du triangle ACS est une hauteur du triangle ARB.

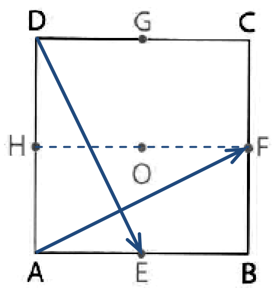
   $\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BR}\begin{pmatrix}0-4\\2-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BR}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{BR} = -4\times 1 + 2\times 2 = -4 + 4 = 0$ donc **les vecteurs $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{BR}$ sont orthogonaux.**

   Par conséquent, la médiane (AT) du triangle ACS est une hauteur du triangle ARB.

Exercice n°2 (7 points)

ABCD est un carré de côté 5 et E, F, G, H sont les milieux des côtés.



1. Déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}^2$ et $\overrightarrow{AD}^2$.

   ABCD est un carré, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux,

   D'où $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0}$

   $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 5^2 = 25}$

   $\boldsymbol{\overrightarrow{AD}^2 = AD^2 = 5^2 = 25}$

2. Démontrer que $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

   $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GE}$ d'après la relation de Chasles

   $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$ car ABCD est un carré et G est le milieu de [DC]

   $\boldsymbol{\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}}$

3. En déduire $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}$. Interpréter géométriquement.

   $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AF}$

   $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}$

   $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}$ car $\overrightarrow{AB}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AF}$ sur (AB)

   $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}AB^2 - AD\times AH$ et $\overrightarrow{AH}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AF}$ sur (AD)

   $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF} = \frac{25}{2} - 5\times\frac{5}{2}$

   $\boldsymbol{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF} = 0}$ **donc les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux.**

Exercice n°3 (5 points)

Un téléphérique progresse à vitesse constante : à chaque seconde, son altitude augmente de 0,75 m.

La gare de départ est à une altitude de 1 450 m.

On appelle a_n l'altitude de la cabine après n secondes de trajet, en mètres.

1. Déterminer les valeurs a_0, a_1 et a_2.

   $\boldsymbol{a_0 = 1\,450}$ $\quad$ $a_1 = 1450 + 0{,}75 = \mathbf{1\,450{,}75}$

   $a_2 = 1\,450{,}75 + 0{,}75 = \mathbf{1\,451{,}5}$

2. Justifier que la suite a est arithmétique (préciser la raison).

   A chaque seconde, l'altitude du téléphérique augmente de 0,75 m, donc $a_{n+1} = a_n + 0{,}75$

   La suite a est donc arithmétique de raison $r = 0{,}75$ et de premier terme $a_0 = 1\,450$

3. La durée du trajet est précisément de 15 minutes.
   Quelle est l'altitude de la gare d'arrivée ?

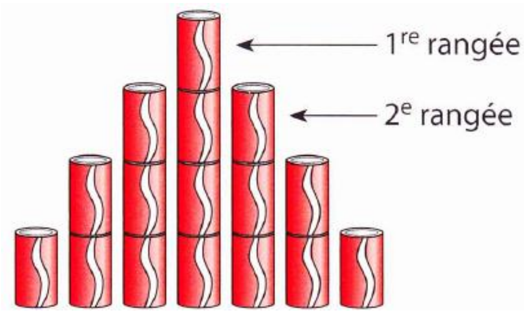
   15 min = 15 × 60 s = 900 s

   On doit donc calculer a_{900} : $\quad a_{900} = a_0 + 900 \times r = 1\,450 + 900 \times 0{,}75$ $\qquad \boldsymbol{a_{900} = 2\,125}$

   La gare d'arrivée est donc située à 2 125 mètres d'altitude.

Exercice n°4 (6 points)

On empile des canettes de la façon suivante.



1. On note u_n le nombre de canettes sur la n[ième] rangée ($n \geq 1$).
   Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

   On passe d'une rangée à la suivante, en ajoutant 2 canettes,
   donc $\quad u_{n+1} = u_n + 2$

   **La suite (u_n) est donc arithmétique de raison $r = 2$
   et de premier terme $u_1 = 1$**

2. Écrire u_n, en fonction de n.

   $u_n = u_1 + (n-1) \times r = 1 + 2\,(n-1) = 1 + 2n - 2$ $\qquad \boldsymbol{u_n = 2n - 1}$

3. Calculer le nombre de canettes nécessaires pour réaliser
   un empilement analogue de 25 rangées.

   Il s'agit de calculer la somme : $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{25}$

   Soit $\quad S = 25 \times \dfrac{u_1 + u_{25}}{2}$ $\qquad$ avec $\quad u_{25} = 2 \times 25 - 1 = 49$

   $S = 25 \times \dfrac{1 + 49}{2} = 25 \times 25$ $\qquad S = 625$

   Pour réaliser un empilement analogue de 25 rangées, il faudra donc 625 canettes.